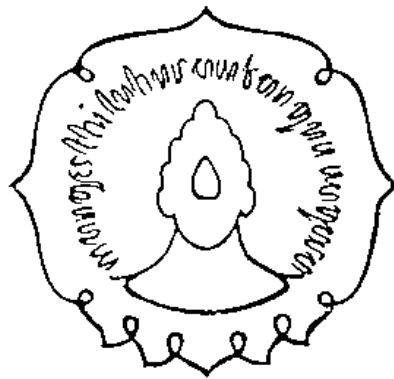


**PELABELAN TOTAL *SUPER VERTEX-MAGIC* PADA
CYCLE DAN GRAF *CIRCULANT***



Oleh :

NONY OKTAVY LILIYANI

M0102039

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar
Sarjana Sains Matematika

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA**

2010

SKRIPSI
PELABELAN TOTAL *SUPER VERTEX-MAGIC* PADA *CYCLE* DAN
GRAF *CIRCULANT*

Yang disiapkan dan disusun oleh

NONY OKTAVY LILIYANI

NIM M0102039

dibimbing oleh

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dra. Mania Roswitha, M.Si

NIP 19520628198303 2 001

Bowo Winarno, M.Kom

NIP 19810430 200812 1 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada hari Jumat, tanggal 25 Juni 2010

dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji

Tanda Tangan

1. Drs. Tri Atmojo K., M.Sc, Ph.D

1.

NIP. 19630826 1988031 002

2. Dra. Diari Indriati, M.Si

2.

NIP. 19610112 1988112 001

3. Drs. Santoso B. W., M.Si

3.

NIP. 19620203 1991031 001

Surakarta, 30 April 2010

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,

Ketua Jurusan Matematika,

Prof. Drs. Sutarno, M.Sc, Ph.D

NIP. 19600809 198612 1 001

Drs. Sutrima, M.Si

NIP.19661007 199302 1 001

ABSTRAK

Nony Oktavy Liliyani, 2010, PELABELAN TOTAL SUPER VERTEX-MAGIC PADA CYCLE DAN GRAF CIRCULANT. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret Surakarta.

Pelabelan graf adalah pemberian label pada *vertex*, *edge* atau *vertex* sekaligus *edge*. Pemberian label pada *vertex* sekaligus *edge* disebut pelabelan total. G , menyatakan sebuah graf berhingga, sederhana dan tak berarah, dengan V dan E masing-masing adalah himpunan *vertex* dan *edge* dalam G . Diasumsikan $N(v)$ adalah himpunan *vertex* di persekitaran v dalam G , v adalah *order* dan ϵ adalah *size* dalam graf G . Pelabelan total *vertex-magic* adalah suatu bijeksi λ :

$1, 2, \dots, v$ dengan syarat bahwa untuk setiap $v \in V$ berlaku

$$\sum_{j \in N(v)} \lambda(j) + \lambda(v) = k$$

dengan k adalah konstanta *magic* yang bernilai konstan. Pelabelan total *vertex-magic* disebut *super* jika $\lambda(V) = \{1, 2, \dots, v\}$. Graf yang memuat pelabelan total *super vertex-magic* disebut graf *super vertex-magic*. Graf yang digunakan sebagai objek penulisan skripsi adalah *cycle* C_n , gabungan *disjoint m cycle* mC_n , graf *circulant* $C_{1,2,\dots,n-1}$, $C_{1,2,3}$, $C_{1,2,3,4}$ dan gabungan *disjoint m* graf *circulant* $mC_{1,2,\dots,n-1}$.

Pembahasan skripsi merupakan kaji ulang jurnal yang bertujuan mengetahui *cycle* dan graf *circulant* yang memuat pelabelan total *super vertex magic*, mengetahui pelabelan total *super vertex-magic* pada graf-graf objek penulisan. Metode penulisan yang digunakan adalah studi literatur.

Kesimpulan dari hasil pembahasan skripsi adalah sebagai berikut.

1. Pelabelan total *super vertex-magic* termuat dalam *cycle* C_n dan graf *circulant* $C_{1,2,\dots,n-1}$ yang memiliki n ganjil. Gabungan *disjoint m cycle* mC_n dan gabungan *disjoint m* graf *circulant* $mC_{1,2,\dots,n-1}$ mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika m dan n ganjil.
2. Konstanta *magic* pada pelabelan total *super vertex-magic* ditentukan dengan rumus

$$k = \frac{v(v-1)}{2} + 1$$

Pelabelan graf dilakukan dengan aturan tertentu sedemikian hingga dihasilkan konstanta *magic* k .

Kata kunci : pelabelan *magic*, pelabelan total *super vertex-magic*, *cycle*, graf *circulant*.

ABSTRACT

Nony Oktavy Liliyani, 2010, SUPER VERTEX-MAGIC TOTAL LABELINGS OF CYCLE AND CIRCULANT GRAPH. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Graph labeling is a labeling of vertices, edges or vertices as well as edge. Labeling of both edge and vertices are called total labelings. Let G be a finite, simple and undirect graph, where V and E are sets of vertices and edges of G . We call $N(v)$ is a set of vertices in neighborhood of v in G , v is order and $|V|$ is size of graph G . A vertex-magic total labelings is a bijection $\lambda : \{1, 2, \dots, v+e\} \rightarrow V \cup E$ with the property that for every $v \in V$ applies,

$$\sum_{e \in N(v)} \lambda(e) + \lambda(v) = k$$

for some constant k . A vertex-magic labeling λ is called super vertex-magic labelings if $\lambda(V) = \{1, 2, \dots, v\}$. A graph containing a super vertex-magic total labeling is called a super vertex-magic graph. In this final project, graphs which discussed are cycles C_n , disjoint union of m cycles mC_n , circulant graphs $C(1, S)$, $C(1, 2, 3)$, $C(1, 2, 3, 4)$ and disjoint union of m circulant graphs $mC(1, S)$.

The final project are analyzing and studying the science journal with purposes to find out whether a cycle and circulant graph contain super vertex-magic labelings, to know the super vertex-magic total labelings on the discussed graphs. The method of writing used is a literary study.

The discussion can be concluded as follows.

1. There are super vertex-magic total labelings on cycles C_n and circulant graphs $C(1, S)$ if $n \equiv 1 \pmod{2}$ if n is odd. There are super vertex-magic total labelings on disjoint union of m cycles mC_n and disjoint union of m circulant graphs $mC(1, S)$ if m and n are odd.
2. The magic constant of super vertex-magic total labelings is determined by the formula

$$k = \frac{v+1}{2} + \frac{v-1}{2}$$

Graph labeling is given based on certain rules so that it produced magic constant k .

Key word : magic labeling, super vertex-magic total labeling, cycle, circulant graph

MOTO

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”

(QS. Al-Insyiroh : 5)

“Kebaikan sekecil apapun, pantas diperjuangkan”

(penulis)

“Gagal adalah saat kita berhenti berusaha”

(Mario Teguh)

PERSEMBAHAN

Karya sederhana ini, saya persembahkan untuk :

✚ *Papah dan Ibu terhormat*

✚ *Adikku Yudis dan Yoga tercinta*

✚ *Sahabatku Tina, Rettob, Wiwin dan*

teman-teman angkatan 2002 yang

tersayang

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah Subhanahu wa Ta'ala, atas limpahan rahmat, hidayah dan karunia-Nya sehingga penulisan skripsi terselesaikan.

Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi, antara lain

1. Ibu Dra. Mania Roswitha, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Skripsi I, yang telah sabar dan sepenuh hati memberikan bimbingan selama penulisan skripsi.
2. Bapak Bowo Winarno, M. Kom selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan dukungan dan bimbingan selama penulisan skripsi.
3. Bapak Drs. Sutrima, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNS. Oleh karena kebijaksanaan beliau yang telah memberikan kesempatan dan kemudahan hingga penulisan skripsi selesai.
4. Semua pihak yang telah membantu dan memperlancar penulisan skripsi.

Semoga Allah Subhanahu wa Ta'ala memberikan balasan yang terbaik atas semua bantuan dan dukungan yang telah diberikan kepada penulis. Amin.

Surakarta, April 2010

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
ABSTRAK.....	iii
ABSTRACT.....	iv
MOTO.....	v
PERSEMBAHAN.....	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL.....	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penulisan.....	3
1.5 Manfaat Penulisan.....	3
BAB II LANDASAN TEORI.....	4
2.1 Tinjauan Pustaka	4
2.1.1 Pengertian Graf	4
2.1.2 Konsep Dasar Graf	5
2.1.3 Graf Regular	7
2.1.4 <i>Cycle</i>	8
2.1.5 Graf <i>Circulant</i>	8
2.1.6 Graf Terhubung	9
2.1.7 Graf Tak Berarah.....	9
2.1.8 Graf Isomorfik dan Gabungan Graf	10
2.1.9 Pemetaan	12
2.1.10 Pelabelan Graf dan Bobot Graf	13
2.1.11 Pelabelan Total <i>Super Vertex-magic</i>	14
2.1.12 Matriks <i>Adjacency</i> Label dan Tabel <i>Adjacency</i>	15
2.2 Kerangka Pemikiran.....	17

BAB III	METODE PENELITIAN.....	18
BAB IV	PEMBAHASAN	20
	4.1 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Graf	20
	4.2 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada <i>Cycle C</i>	23
	4.3 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Gabungan <i>Disjoint m Cycle mC</i>	28
	4.4 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Graf <i>Circulant C</i> 1,	31
	4.5 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Graf <i>Circulant C</i> 1,2,3	35
	4.6 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Graf <i>Circulant C</i> 1,2,3,4	39
	4.7 Pelabelan Total <i>Super Vertex-Magic</i> pada Gabungan <i>Disjoint m Graf Circulant mC</i> 1,	44
BAB V	KESIMPULAN DAN SARAN.....	52
	5.1 Kesimpulan	52
	5.2 Saran.....	52
	DAFTAR PUSTAKA	53
	LAMPIRAN.....	54

DAFTAR TABEL

		Halaman
Tabel 2.1	Tabel <i>adjacency</i>	15
Tabel 2.2	Tabel <i>adjacency</i> graf G	16
Tabel 4.1	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada C_3 1,2,3 dengan 205	39
Tabel 4.2	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada C_3 1,2,3,4 dengan 323	41
Tabel 4.3	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada C_4 1,2,3,4 dengan 51	42

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1	Graf 4
Gambar 2.2	Graf sederhana 5
Gambar 2.3	Graf G dengan order 6 dan size 9 6
Gambar 2.4	Graf (a) 0-regular, (b) 1-regular, (c) 2-regular, (d) 3-regular, (e) 4-regular, (f) 5-regular..... 7
Gambar 2.5	Cycle C_3 dan C 8
Gambar 2.6	Graf Circulant (a) $C_{1,2}$ (b) $C_{1,2}$, (c) $C_{1,3}$, (d) $C_{1,2,3}$ (e) $C_{1,2,3,4}$ 8
Gambar 2.7	(a) Graf terhubung, (b) Graf tak terhubung..... 9
Gambar 2.8	(a) Graf berarah, (b) Graf tak berarah..... 10
Gambar 2.9	Graf G dan Graf G_3 non-isomorfik dengan G , G 10
Gambar 2.10	Gabungan graf (a) $G \cup G$, (b) $G_3 \cup G \cup G$ 11
Gambar 2.11.	(a) Fungsi satu-satu, (b) Fungsi onto, (c) Fungsi bijeksi..... 12
Gambar 2.12	Pelabelan total pada graf 13
Gambar 2.13	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> dengan $k = 12$ 15
Gambar 2.14	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada graf G 16
Gambar 4.1	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada C_3 dengan 12..... 26
Gambar 4.2	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada C dengan 1 26
Gambar 4.3	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada C dengan 26..... 26
Gambar 4.4	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada C_3 dengan 47 27
Gambar 4.5	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada C 27

Gambar 4.6	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $3C_3$ dengan 33	30
Gambar 4.7	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $5C_3$ dengan 54	31
Gambar 4.8	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $5C$ dengan 8	31
Gambar 4.9	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2}$ dengan 62	34
Gambar 4.10	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,3}$ dengan 62	34
Gambar 4.11	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2}$ dengan 45	35
Gambar 4.12	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2,3}$ dengan 112	38
Gambar 4.13	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2,3,4}$ dengan 225	40
Gambar 4.14	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $C_{1,2,3,4}$ dengan 274	41
Gambar 4.15	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $3C_{1,2}$ dengan 130	45
Gambar 4.16	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $5C_{1,2}$ dengan 215	46
Gambar 4.17	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $3C_{1,2}$ dengan 181	46
Gambar 4.18	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $3C_{1,3}$ dengan 181	47
Gambar 4.19	Pelabelan total <i>super vertex-magic</i> pada $5C_{1,4}$ dengan 385	47

DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

	: pemetaan f
Φ	: pemetaan satu-satu/ injeksi
	: pemetaan bijeksi
	: <i>vertex</i> berindeks i
	: urutan pergandaan graf
	: <i>vertex</i> berindeks i pada pergandaan ke- p
	: <i>edge</i> yang dihubungkan oleh dan j
j	: <i>edge</i> yang dihubungkan oleh dan j pada pergandaan ke- p
	: pelabelan <i>vertex</i> di bawah
j	: pelabelan <i>edge</i> j di bawah
	: pelabelan <i>vertex</i> pada pergandaan ke- p di bawah
j	: pelabelan <i>edge</i> j pada pergandaan ke- p di bawah
	: konstanta <i>magic</i>
	: bobot dari elemen graf di bawah
	: derajat graf <i>regular</i>
n	: panjang graf
m	: banyak pergandaan graf
C	: <i>cycle</i> dengan panjang n
mC	: gabungan <i>disjoint</i> m <i>cycle</i> dengan panjang n
$C - 1,$: graf <i>circulant</i> dengan panjang n dan <i>chord</i> berjarak s
$mC - 1,$: gabungan <i>disjoint</i> dari m graf <i>circulant</i> $C - 1,$
$C - 1,2,3$: graf <i>circulant</i> dengan panjang n dan <i>chord</i> berjarak 2, 3
$C - 1,2,3,4$: graf <i>circulant</i> dengan panjang n dan <i>chord</i> berjarak 2, 3, 4
	: bilangan asli
G	: graf G
$G ,$: graf G dengan himpunan <i>vertex</i> dan himpunan <i>edge</i>
G	: himpunan <i>vertex</i> dari graf G

E	:	himpunan <i>edge</i> dari graf G
$ V $:	<i>order</i> atau banyaknya <i>vertex</i> pada graf G
$ E $:	<i>size</i> atau banyaknya <i>edge</i> pada graf G
\deg	:	derajat <i>vertex</i>
$N(v)$:	himpunan <i>vertex</i> di persekitaran <i>vertex</i>
$G \cup G$:	union (gabungan) graf G dan G
mG	:	gabungan <i>disjoint</i> dari m graf G yang isomorfik
$G \cong G$:	graf G isomorfik dengan graf G
$G \vee G$:	penggabungan himpunan <i>vertex</i> dari graf G dan G
$G \cup G$:	penggabungan himpunan <i>edge</i> dari graf G dan G
$\lfloor \cdot \rfloor$:	fungsi <i>floor</i>
\sim	:	ekuivalen
\square	:	akhir bukti

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Penelitian tentang pelabelan graf mulai berkembang sejak tahun 60-an. Selang puluhan tahun, teknik pelabelan graf dipelajari lebih dari 1000 tulisan (Gallian [4]). Menurut Slamin [9], pelabelan graf merupakan salah satu topik yang banyak mendapat perhatian karena model-model yang terdapat dalam pelabelan graf berguna untuk aplikasi luas, seperti masalah teori koding, masalah kristalografi sinar x , radar, sistem alat jaringan komunikasi dan desain sirkuit. Pelabelan *magic* diperkenalkan oleh Sedláček pada tahun 1963 (Gallian [4]). Suatu pelabelan disebut *magic* apabila terdapat suatu nilai konstan yang disebut konstanta *magic*. Pelabelan total *vertex-magic* pertama kali diperkenalkan oleh MacDougall, Miller, Slamin dan Wallis pada tahun 1999 (Gallian [4]). Pelabelan total *super vertex-magic* diperkenalkan oleh MacDougall, Miller dan Sugeng [8] pada tahun 2004.

Pelabelan graf dalam teori graf adalah pemberian nilai (label) pada *vertex*, *edge* atau keduanya, yaitu *vertex* dan *edge*. Label yang digunakan berupa bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif. Pemberian label pada *vertex* disebut pelabelan *vertex*, pemberian label pada *edge* disebut pelabelan *edge*, sedangkan pemberian label pada *vertex* dan *edge* disebut pelabelan total. Jumlah antara label *vertex* dan *edge-edge* yang *incident* dengan *vertex* tersebut disebut bobot *vertex*. Jumlah antara label *edge* dan *vertex-vertex* yang *incident* dengan *edge* tersebut disebut bobot *edge*. Jika suatu pelabelan total mengakibatkan bobot *vertex* konstan maka disebut pelabelan total *vertex-magic*. Suatu pelabelan total yang mengakibatkan bobot setiap *edge* konstan disebut pelabelan total *edge magic*.

Pelabelan total *super vertex-magic* (*Super Vertex-Magic Total Labelings*) juga dikenal sebagai pelabelan total *strongly vertex-magic* (*Strongly Vertex-Magic Total Labelings*). Konsep pelabelan total *super vertex-magic* diperkenalkan oleh MacDougall *et al.* [8]. Jika *order* graf G adalah $|G| = v$, *size* $|G|$ dan

himpunan *vertex* di persekitaran dalam graf G dinyatakan dengan $N(v)$, maka pelabelan total *vertex-magic* adalah suatu bijeksi

$$\lambda : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v\}$$

dengan syarat bahwa untuk setiap $v \in V(G)$ berlaku

$$\sum_{u \in N(v)} \lambda(u) + \lambda(v) = k$$

dengan k adalah konstanta *magic* yang bernilai konstan. Graf G disebut graf *vertex-magic* jika memuat pelabelan total *vertex-magic*. Pelabelan total *vertex-magic* disebut *super* jika $\lambda(v) = 1, 2, \dots, v$. Graf yang memuat pelabelan total *super vertex-magic* disebut graf *super vertex-magic*.

Pembahasan skripsi merupakan kaji ulang secara teoritis dari jurnal karya MacDougall *et al.* [8] dan Balbuena *et al.* [1]. Graf-graf yang dikaji adalah *cycle* C_n , gabungan *disjoint m cycle* mC_n , graf *circulant* $C_n(1, S)$, $C_n(1, 2, 3)$, dilanjutkan penerapan kaji ulang pada keluarga graf *circulant* yang lain yaitu $C_n(1, 2, 3, 4)$ dan gabungan *disjoint m graf circulant* $mC_n(1, S)$,

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penulisan skripsi adalah

1. bagaimana menentukan *cycle*, gabungan *disjoint m cycle*, graf *circulant* dan gabungan *disjoint m graf circulant* yang mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* ?
2. bagaimana pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle* C_n , gabungan *disjoint m cycle* mC_n , graf *circulant* $C_n(1, S)$, $C_n(1, 2, 3)$, $C_n(1, 2, 3, 4)$ dan gabungan *disjoint m graf circulant* $mC_n(1, S)$, sedemikian hingga diperoleh graf *super vertex-magic* ?

1.3 Batasan Masalah

Skripsi membahas mengenai pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle* C , gabungan *disjoint m cycle* mC , graf *circulant* $C(1, \dots, C(1,2,3, \dots, C(1,2,3,4$ dan gabungan *disjoint m graf circulant* $mC(1, \dots$, yang dibatasi oleh graf berhingga, sederhana dan tidak berarah.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi mengenai pelabelan total *super vertex-magic* adalah

1. mengetahui *cycle*, gabungan *disjoint m cycle*, graf *circulant* dan gabungan *disjoint m graf circulant* yang memuat pelabelan total *super vertex-magic*,
2. mengetahui pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle* C , gabungan *disjoint m cycle* mC , graf *circulant* $C(1, \dots, C(1,2,3, \dots, C(1,2,3,4$ dan gabungan *disjoint m graf circulant* $mC(1, \dots$ sedemikian hingga diperoleh graf-graf *super vertex-magic*.

1.5 Manfaat Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. menambah wawasan tentang teori graf,
2. mengetahui tentang pelabelan graf khususnya pelabelan total *super vertex-magic*,
3. mengetahui graf-graf yang memuat pelabelan total *super vertex-magic*, khususnya *cycle* dan graf *circulant*.

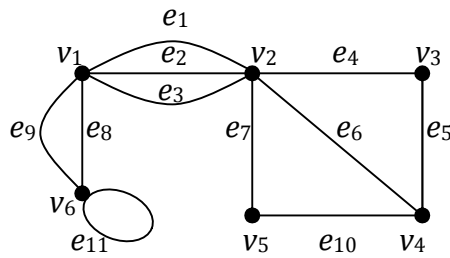
BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Tinjauan Pustaka

2.1.1 Pengertian Graf

Johnsonbaugh [7] mengemukakan bahwa suatu graf G , atau graf tak berarah terdiri dari himpunan tak kosong *vertex* V dan himpunan *edge* E , dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$, sedemikian hingga setiap *edge* e merupakan pasangan tak berurutan dari anggota-anggota V . Jika suatu *edge* e menghubungkan *vertex* v_i dan v_j maka $e = (v_i, v_j)$ atau $e = (v_j, v_i)$. Selanjutnya graf $G = (V, E)$ disebut graf G .



Gambar 2.1 Graf

Suatu graf G dikatakan kosong jika $E = \emptyset$ (Harary [5]). Jika graf G , merupakan graf kosong maka setiap *vertex*-nya terisolasi. Graf yang memiliki hanya satu *vertex* disebut graf *trivial*. Contoh gambar graf ditunjukkan oleh Gambar 2.1. Graf pada Gambar 2.1 memiliki himpunan *vertex* V dan himpunan *edge* E yaitu

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$$

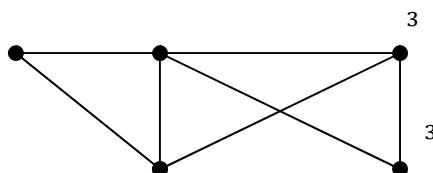
dengan *edge-edge* yang dapat ditulis $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, $e_3 = (v_1, v_2)$, $e_4 = (v_2, v_3)$, $e_5 = (v_3, v_4)$, $e_6 = (v_2, v_4)$, $e_7 = (v_2, v_5)$, $e_8 = (v_1, v_6)$, $e_9 = (v_1, v_6)$, $e_{10} = (v_5, v_4)$, $e_{11} = (v_6, v_6)$. Selanjutnya *edge* e dinotasikan (v_i, v_j) dengan i, j bilangan asli.

2.1.2 Konsep Dasar Graf

Fletcher *et al.* [3] mengemukakan bahwa sebuah *edge* j dalam sebuah graf G yang menghubungkan *vertex* dan j disebut *incident* dengan dan j , demikian juga *vertex* dan j disebut *incident* dengan j . *Vertex* disebut *initial vertex* dan j disebut *terminal vertex*. *Vertex* dan j merupakan *vertex-vertex* yang *adjacent*. Pasangan *vertex* dan *edge* yang *adjacent* ditunjukkan oleh Gambar 2.1. *Vertex* $adjacent$ dengan 3 karena dihubungkan sebuah *edge* yaitu *edge* e_4 . *Vertex* juga *adjacent* dengan *vertex* $1, 2, 3$. *Edge* $adjacent$ dengan *edge* $1, 2$, karena keduanya *incident* dengan *vertex* maka dapat dikatakan *edge* dan *edge* *incident* dengan 1 .

Menurut Chartrand dan Oellermann [2], suatu graf G dikatakan memiliki *multiple edge* jika terdapat lebih dari satu *edge* yang menghubungkan pasangan *vertex* yang sama. Graf G dikatakan memiliki *loop* jika terdapat *edge* yang menghubungkan dirinya sendiri. Suatu graf yang memiliki *multiple edge* dan *loop* disebut *pseudograph*.

Graf yang ditunjukkan oleh Gambar 2.1 memiliki *multiple edge* karena terdapat lebih dari satu *edge* yang menghubungkan pasangan *vertex* yang sama. *Edge* e_1, e_2, e_3 , menghubungkan *vertex* dan 3 , sedangkan *edge* e_8, e_9 menghubungkan *vertex* dan 3 . Selain memiliki *multiple edge*, graf di Gambar 2.1 juga memiliki *loop* karena *edge* e_{11} menghubungkan satu *vertex* yaitu *vertex* 1 . Karena memiliki *multiple edge* dan *loop* maka graf yang ditunjukkan oleh Gambar 2.1 disebut *pseudograph*. Suatu graf disebut graf sederhana (*simple graph*) jika tidak mengandung *loop* dan *multiple edge* (Harary [5]). Graf sederhana disajikan dalam Gambar 2.2

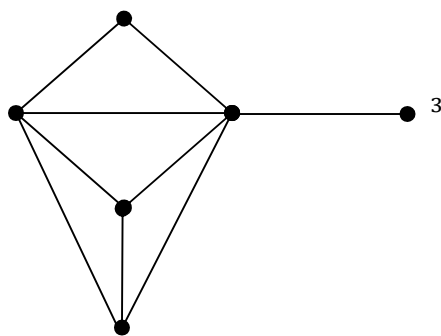


Gambar 2.2 Graf sederhana

Path $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ untuk $n \geq 0$ adalah barisan *vertex* dan *edge* yang bergantian dan tidak memuat perulangan *vertex* dan *edge* (Chartrand dan Oellermann [2]). Graf dalam Gambar 2.2 mempunyai *path* $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$, $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$.

Order adalah banyak *vertex* yang terdapat dalam graf G . *Order* graf G dinotasikan dengan $|V(G)|$ atau v (baca : nu). Banyak *edge* dalam graf G disebut *size*. *Size* graf G dinotasikan dengan $|E(G)|$ atau e (baca : epsilon). Contoh graf yang memiliki *order* 6 dan *size* 9 disajikan oleh Gambar 2.3.

G :



Gambar 2.3 Graf G dengan *order* 6 dan *size* 9

Neighborhood vertex dinotasikan $N(v)$, didefinisikan untuk setiap *vertex* dalam graf G

$$N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$$

dengan derajat dinotasikan $\deg(v) = |N(v)|$ yaitu banyak *vertex* yang *adjacent* dengan v (Chartrand dan Oellermann [2]). *Neighborhood* dan derajat setiap *vertex* graf G pada Gambar 2.3 adalah sebagai berikut.

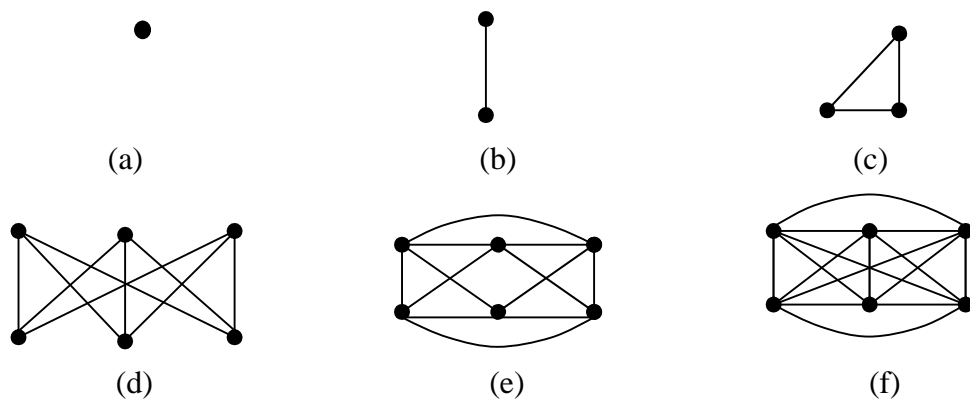
$$\begin{aligned} N(1) &= \{2, 3, 4\}, & \deg(1) &= 3 \\ N(2) &= \{1, 3, 4, 5\}, & \deg(2) &= 4 \\ N(3) &= \{1, 2, 5\}, & \deg(3) &= 3 \\ N(4) &= \{1, 2, 5\}, & \deg(4) &= 3 \\ N(5) &= \{3, 4, 6\}, & \deg(5) &= 3 \\ N(6) &= \{5\}, & \deg(6) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \dots, \dots, \dots & \deg &= 3 \\
 &= \dots, \dots, \dots & \deg &= 3 \\
 &= \dots, \dots, \dots & \deg &= 4
 \end{aligned}$$

Menurut Fletcher *et al.* [3], jika suatu graf G , dengan himpunan *vertex* G dan himpunan *edge* G sedemikian hingga G , \dots , \dots , dan G , \dots , \dots , maka $\sum \deg = 2q$. Graf pada Gambar 2.3 memiliki *order* 6 dan *size* 9 sehingga jumlah derajat semua *vertex*-nya adalah $\sum \deg = 2+5+1+3+3+4 = 2 \cdot 9 = 18$.

2.1.3 Graf Regular

Harary [5] menuliskan bahwa suatu graf G disebut *r-regular* atau *regular* berderajat r , jika setiap *vertex* dalam graf G memiliki derajat r . Beberapa contoh graf *regular* berderajat 0, 1, 2, 3, dan 4 disajikan oleh Gambar 2.4. Graf *regular* berderajat 0 tidak memiliki *edge*. Jika graf *regular* G berderajat satu maka memuat tepat satu *edge*. Graf 2-*regular* G berbentuk *cycle*. Graf 3-*regular* disebut graf *cubic*.



Gambar 2.4 Graf (a) 0-*regular*, (b) 1-*regular*, (c) 2-*regular*, (d) 3-*regular*,
(e) 4-*regular*, (f) 5-*regular*

2.1.4 Cycle

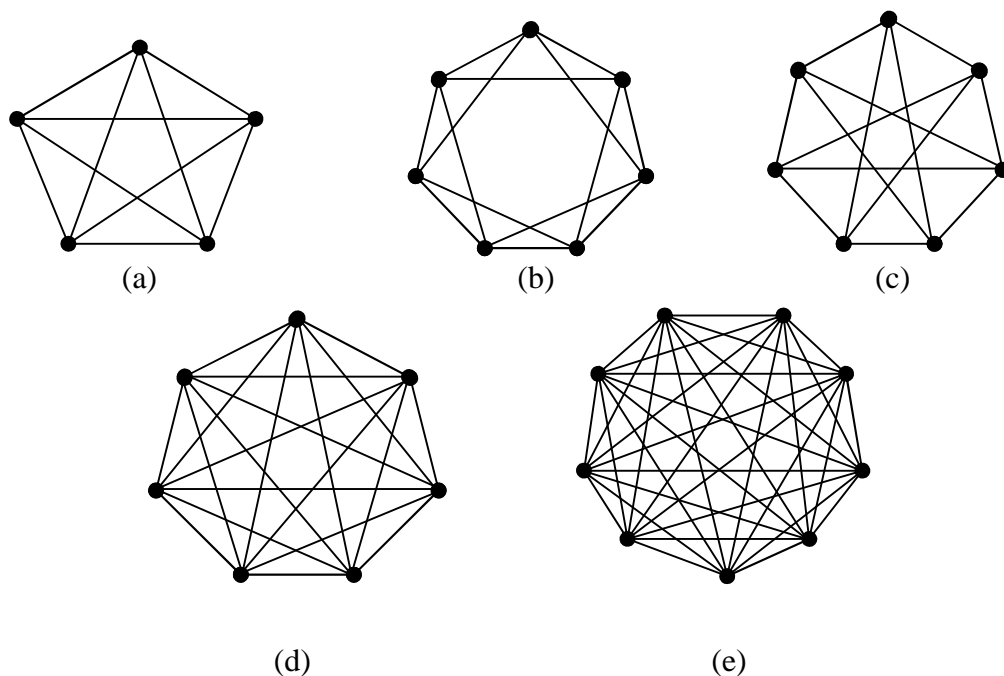
Chartrand dan Oellermann [2] mendefinisikan *cycle* adalah barisan *vertex-vertex* , , , dengan $n \geq 3$, dan , , , adalah *vertex-vertex* yang berbeda.



Gambar 2.5 Cycle C_3 dan C_6

Sebuah *cycle* dengan panjang n atau memiliki sejumlah n *vertex* disebut n -*cycle* atau C_n . Graf yang disajikan oleh Gambar 2.5 merupakan contoh *cycle* dengan $n = 3$ dan $n = 6$.

2.1.5 Graf Circulant



Gambar 2.6 Graf *circulant* (a) $C(5; \{1,2\})$ (b) $C(7; \{1,2\})$, (c) $C(8; \{1,3\})$, (d) $C(9; \{1,2,3\})$,
(e) $C(12; \{1,2,3,4\})$

Definisi graf *circulant* yang dikemukakan oleh Balbuena *et al.* [1] adalah sebagai berikut. Diberikan $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_h \leq n/2$, dengan n dan a_i ($i = 1, 2, \dots, h$) merupakan bilangan bulat positif. Suatu graf *circulant* $C_n(a_1, a_2, \dots, a_h)$ adalah graf *regular* yang memiliki himpunan *vertex* $\{0, 1, \dots, n-1\}$ dan himpunan *edge* $\{(i, i+a_1 \bmod n), (i, i+a_2 \bmod n), \dots, (i, i+a_h \bmod n) \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}$.

Graf *circulant* $C_n(a_1, a_2, \dots, a_h)$ merupakan graf $2h$ -*regular*. Jika $a_1 = n/2$ maka graf $C_n(a_1, a_2, \dots, a_h)$ merupakan graf komplit. Graf *circulant* dapat dikatakan sebagai *cycle* dengan *chords* yang menghubungkan *vertex-vertex* dengan jarak a_i pada *cycle*. Contoh graf *circulant* disajikan dalam Gambar 2.6.

2.1.6 Graf Terhubung

Menurut Chartrand dan Oellermann [2], graf G disebut terhubung (*connected*) jika setiap dua *vertex* i dan j dengan $i \neq j$ dalam graf G terdapat *path* yang menghubungkan kedua *vertex* tersebut. Sebaliknya, jika ada dua *vertex* yang tidak dihubungkan *path* maka graf G tak terhubung (*disconnected*). Contoh graf terhubung disajikan oleh Gambar 2.7 (a). Suatu graf tak terhubung dapat dibagi menjadi komponen-komponen terhubung. Gambar 2.7 (b) menunjukkan bahwa graf tak terhubung terbentuk dari tiga komponen.



Gambar 2.7 (a) Graf terhubung, (b) Graf tak terhubung

2.1.7 Graf Tak berarah

Graf tak berarah adalah graf yang *edge*-nya tidak mempunyai arah sedangkan graf berarah adalah graf yang *edge*-nya mempunyai arah (Hartsfield dan Ringel [6]). Contoh graf berarah dan tak berarah ditunjukkan oleh Gambar 2.8.



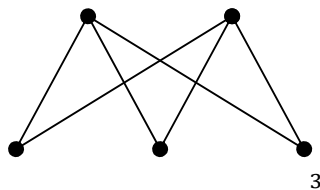
Gambar 2.8 (a) Graf berarah, (b) Graf tak berarah

2.1.8 Graf Isomorfik dan Gabungan Graf

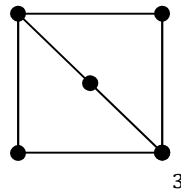
Harary [5] mengemukakan bahwa dua graf G dan G_j disebut isomorfik jika terdapat fungsi satu-satu Φ dari $V(G)$ onto $V(G_j)$ sedemikian hingga

G jika dan hanya jika $\Phi \Phi_j^{-1} \in G$. Fungsi Φ disebut *isomorfisme*. Jika G dan G_j isomorfik maka dapat dinotasikan $G \cong G_j$.

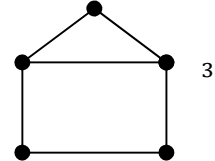
G :



G_j :



G_3 :

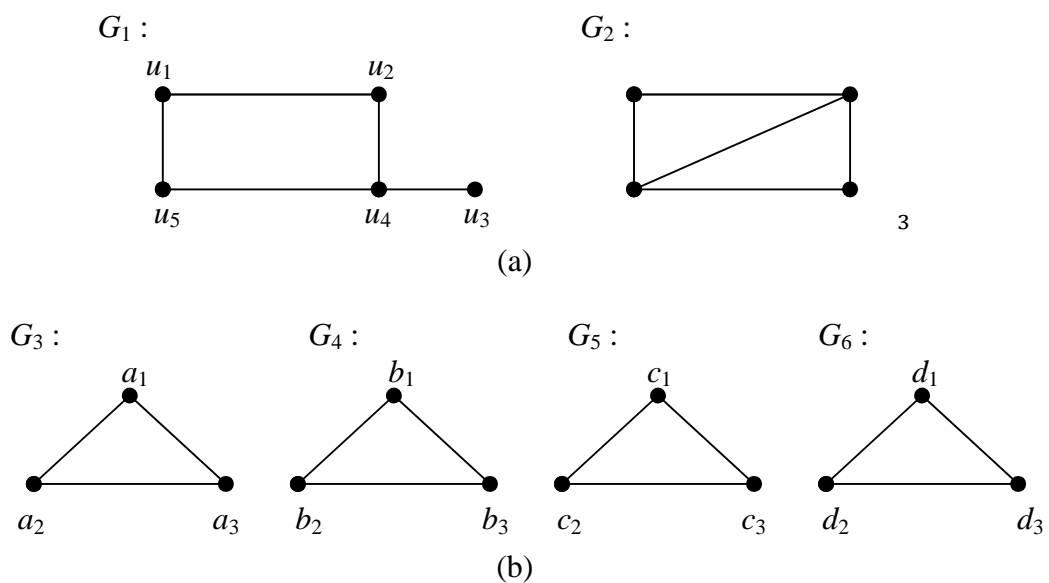
Gambar 2.9 Graf G , G_j dan graf G_3 non-isomorfik dengan G , G_j

Graf-graf yang ditunjukkan oleh Gambar 2.9 memiliki *order* 5, *size* 6, jumlah derajat 12. Graf G , terdiri atas himpunan *vertex* v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan himpunan *edge* $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Graf G_j , memuat himpunan *vertex* v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan himpunan *edge* $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Vertex v_1 adjacent dengan vertex v_2, v_3, v_4 dalam graf G . Graf G_j , mempunyai vertex v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 adjacent dengan vertex v_2, v_3, v_4 . Oleh karena terdapat suatu pemetaan satu-satu Φ dari G ke G_j dengan $\Phi(v_1) = v_1, \Phi(v_2) = v_2, \Phi(v_3) = v_3, \Phi(v_4) = v_4, \Phi(v_5) = v_5$ sehingga graf G isomorfik dengan graf G_j , atau $G \cong G_j$. Oleh karena itu fungsi Φ adalah *isomorfisme*.

Graf G_3 memuat *vertex-vertex* dan *edge-edge*. Graf G memiliki dua *vertex* yang *adjacent* dengan tiga *vertex* lainnya yaitu dan yang *adjacent* dengan *vertex* 3 , sedangkan graf G_3 tidak memilikinya. Oleh karena tidak terdapat fungsi satu-satu dari G ke G_3 maka dapat dikatakan graf G tidak isomorfik atau non-isomorfik dengan graf G_3 dan berakibat graf G_3 juga non-isomorfik dengan graf G .

Graf *disjoint* diartikan sebagai suatu graf yang memuat komponen terpisah di dalamnya. Graf pada Gambar 2.10 (a) merupakan graf *disjoint* yang terbentuk dari graf G dan G . Graf pada Gambar 2.10 (b) merupakan graf *disjoint* yang terbentuk dari graf G_3 , G , G , dan G . Graf *disjoint* merupakan graf tak terhubung.

Gabungan dua graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G \cup G$ yang memiliki himpunan *vertex* $G \cup G$ dan himpunan *edge* $G \cup G$. Jika $G \cup G$, maka dapat dinotasikan $2G$ untuk $G \cup G$. Secara umum, jika G, G, G adalah pasangan graf *disjoint* yang isomorfik ke G maka dapat dinotasikan nG untuk $G \cup G \cup G$ (Chartrand dan Oellermann [2]).

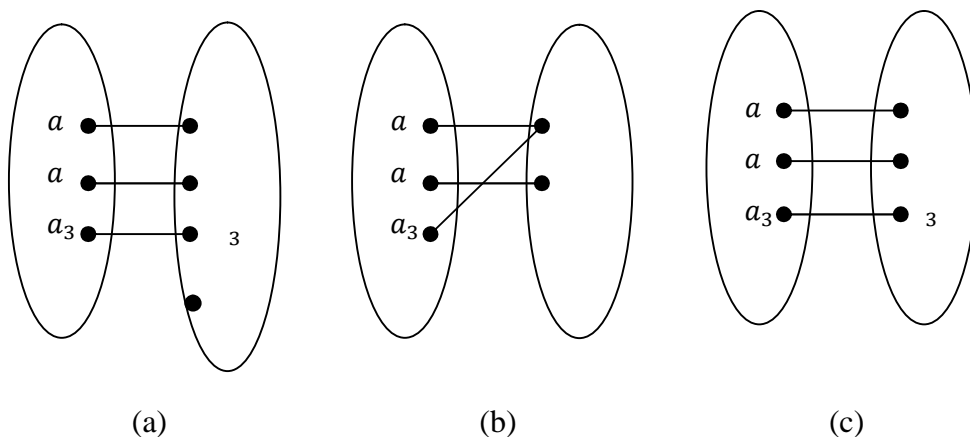


Gambar 2.10 Gabungan graf (a) $G \cup G$, (b) $G_3 \cup G \cup G \cup G$

Contoh gabungan dua graf pada Gambar 2.10 (a) yaitu graf G dan G merupakan graf yang non-isomorfik sehingga dapat dituliskan $G \cup G$ yang memiliki himpunan *vertex* $G \cup G$, a , a , a_3 , a dan himpunan *edge* $G \cup G$, a , a , a_3 , a , a , a_3 , a . Gabungan empat graf pada Gambar 2.10 (b) yaitu graf G_3 , G , G , G dapat dituliskan $G_3 \cup G \cup G \cup G$. Oleh karena graf G_3 , G , G , G saling isomorfik atau $G_3 \cup G \cup G \cup G$ maka disebut gabungan *disjoint* empat graf G yang dinotasikan $4G$. Lebih khusus lagi, graf G merupakan gabungan *disjoint* empat *cycle* yang memiliki panjang tiga sehingga dapat dinotasikan $4C_3$.

2.1.9 Pemetaan

Pemetaan didefinisikan jika diberikan himpunan A dan B maka sebuah pemetaan f dari A ke B adalah himpunan f dari pasangan berurutan sehingga untuk setiap a terdapat dengan tunggal dengan a . Jika a , dan a , maka (Johnsonbaugh [7]). Pemetaan f dari himpunan A ke himpunan B dapat dinotasikan : . Himpunan A disebut daerah asal atau *domain* sedangkan himpunan B disebut daerah kawan atau *kodomain*. Himpunan B yang menjadi hasil relasi dari domain A disebut daerah hasil atau *range*. Pemetaan merupakan salah satu bentuk relasi yang setiap anggota *domain* mempunyai kawan tunggal di *kodomain*.

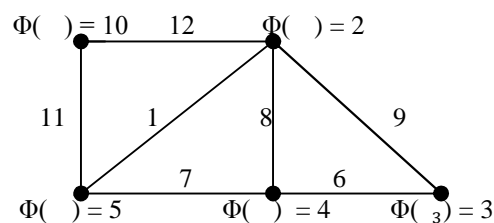


Gambar 2.11 (a) Fungsi satu-satu, (b) Fungsi *onto*, (c) Fungsi bijeksi

Pemetaan : dapat dibedakan menjadi tiga yaitu pemetaan injeksi, pemetaan surjeksi dan pemetaan bijeksi. Suatu pemetaan : disebut pemetaan satu-satu atau injeksi dengan syarat jika a dan a anggota A dan a a , maka a a . Suatu pemetaan disebut pemetaan A *onto* B atau surjeksi apabila memenuhi syarat *range* sama dengan B atau . Suatu pemetaan yang memuat injeksi dan surjeksi disebut bijeksi atau korespondensi satu-satu. Syarat utama bijeksi yaitu banyak anggota *domain* harus sama dengan banyak anggota *kodomain*. Contoh pemetaan satu-satu, pemetaan *onto* dan pemetaan bijeksi disajikan oleh Gambar 2.11.

2.1.10 Pelabelan Graf dan Bobot Graf

Wallis [10] mendefinisikan pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu Φ yang membawa elemen graf G , yaitu himpunan *vertex* atau himpunan *edge*, ke bilangan-bilangan yang bernilai bulat positif atau non-negatif disebut label.



Gambar 2.12 Graf dengan pelabelan total

Pelabelan graf menurut domainnya dapat dibedakan menjadi tiga yaitu pelabelan *edge*, pelabelan *vertex* dan pelabelan total. Pelabelan *edge* adalah fungsi yang membawa himpunan *edge* ke suatu bilangan bulat positif atau non-negatif, sedangkan pelabelan *vertex* adalah fungsi yang membawa himpunan *vertex* ke suatu bilangan bulat positif atau non-negatif. Jika suatu fungsi memiliki domain berupa himpunan *edge* dan himpunan *vertex* serta membawa domain tersebut ke bilangan bulat positif atau non-negatif maka disebut pelabelan total. Graf dengan pelabelan total ditunjukkan oleh Gambar 2.12.

Definisi Wallis [10] mengenai bobot *vertex* dan bobot *edge* yaitu bobot *vertex* v_i dalam pelabelan Φ adalah

$$\Phi(v_i) = \sum_{j \in N(v_i)} \Phi(e_{ij})$$

dan bobot *edge* e_{ij} adalah

$$\Phi(e_{ij}) = \Phi(v_i) + \Phi(v_j).$$

Graf yang ditunjukkan Gambar 2.12 memiliki bobot *vertex* , dinotasikan $\Phi(v_i)$, bobot *edge* e_{ij} dinotasikan $\Phi(e_{ij})$, untuk $i, j = 1, 2, \dots, 5$ dan $i \neq j$ sebagai berikut.

	23		24		14
	32		24		8
v_3	18		26	v_3	13
	25	v_3	14		16

2.1.11 Pelabelan Total Super Vertex-Magic

Menurut MacDougall *et al.* [8], jika G , adalah graf sederhana yang memuat v *vertex* dan e *edge* maka pelabelan total *vertex-magic* adalah suatu bijeksi λ dari G ke G ke bilangan bulat $1, 2, \dots, (v + e)$ dengan syarat bahwa untuk setiap G berlaku

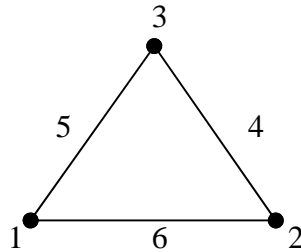
$$\lambda(v_i) + \lambda(e_{ij}) = k$$

dengan k adalah suatu konstanta. Pelabelan total *vertex-magic* disebut *super* jika

$$\lambda(v_i) = 1, 2, \dots, v$$

Nilai konstan k pada bobot *vertex* dan bobot *edge* disebut konstanta *magic*. Jika bobot setiap *edge* dalam graf di bawah pelabelan total λ menghasilkan suatu konstanta *magic* k maka disebut pelabelan total *edge-magic*. Sedangkan suatu pelabelan total disebut pelabelan total *vertex-magic* jika bobot setiap *vertex*-nya konstan dan senilai dengan konstanta *magic* k . Pelabelan total *vertex-magic* yang himpunan *vertex*-nya diberi label $1, 2, \dots, v$ disebut pelabelan total *super vertex-*

magic. Contoh graf yang diberi label dengan pelabelan total *super vertex-magic* disajikan dalam Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Pelabelan total *super vertex-magic* dengan $k = 12$

2.1.12 Matriks *Adjacency* Label dan Tabel *Adjacency*

Definisi matriks *adjacency* label dijelaskan oleh Balbuena *et al.* [1] dan MacDougall *et al.* [8]. Dinyatakan G adalah sebuah graf dan ℓ adalah pelabelan total *super vertex-magic* dalam graf G sehingga setiap *vertex* mempunyai bobot konstan k . Jika $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, v\}$ maka $\ell = \{ \ell(e), \ell(v) \mid e \in E, v \in V \}$. Suatu matriks simetris a_{ij} untuk $i, j = 1, 2, \dots, v$ disebut matriks *adjacency* label dalam graf G jika a_{ij} dirumuskan

$$a_{ij} = \begin{cases} \ell(e_{ij}) & \text{jika } i \neq j \\ \ell(v_i) & \text{jika } i = j \end{cases}$$

dengan e_{ij} adalah label *edge* dan $\ell(v_i)$ adalah label *vertex*. Matriks A dapat disajikan sebagai berikut.

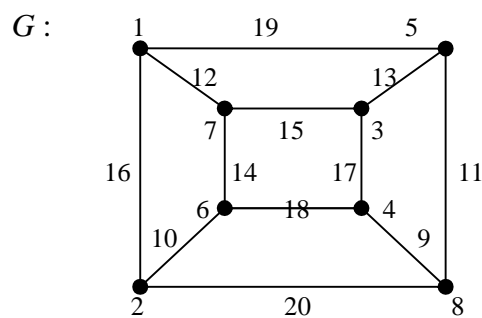
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2v} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v1} & a_{v2} & a_{v3} & \dots & a_{vv} \end{pmatrix}$$

Tabel 2.1 Tabel *adjacency*

$i \setminus j$	1	2	3	...	v
1		a_{12}	a_{13}		a_{1v}
2	a_{21}		a_{23}		a_{2v}

3	a_3	a_3	3		a_{3v}
v	a_v	a_v	a_{v3}		v

Syarat *magic* mengakibatkan jumlah semua entri dalam baris ke- i dan kolom ke- j harus sama dengan konstanta *magic* k . Tabel *adjacency* adalah tabel dengan entri-entri yang bersesuaian dengan matriks A . Tabel *adjacency* ditunjukkan oleh Tabel 2.1. Misalkan diberikan sebuah graf G dengan pelabelan total *super vertex-magic* pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14 Graf G dengan pelabelan total *super vertex-magic*

Label-label dalam graf G dituliskan sebagai berikut.

	1	7	1	13	15
	5	3	12	3	20
3	8	4	16	3	17
	2	6	3	11	10
					18

Sajian label-label graf G dalam tabel *adjacency* ditunjukkan oleh Tabel 2.2. Diperoleh bobot *vertex* baris ke- i dan bobot *vertex* pada kolom ke- j adalah konstan yaitu 48, yang disebut konstanta *magic*.

Tabel 2.2 Tabel *Adjacency* Graf G pada Gambar 2.14

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	19	0	16	12	0	0	0
2	19	5	11	0	0	13	0	0
3	0	11	8	20	0	0	9	0
4	16	0	20	2	0	0	0	10

5	12	0	0	0	7	15	0	14
6	0	13	0	0	15	3	17	0
7	0	0	9	0	0	17	4	18
8	0	0	0	10	14	0	18	6

2.2 Kerangka Pemikiran

Berdasarkan tinjauan pustaka yang telah diberikan, kerangka pemikiran disusun sebagai berikut. Pemetaan satu-satu Φ yang membawa elemen-elemen dalam graf G ke bilangan bulat positif atau non-negatif disebut pelabelan. Suatu pelabelan disebut pelabelan total jika berdomain himpunan *vertex* G dan himpunan *edge* G . Jika suatu pelabelan total adalah fungsi bijektif yang memetakan himpunan $G \cup E$ ke bilangan $1, 2, \dots, v + e$ sehingga diperoleh bilangan konstan k yang dirumuskan

$$\sum_{j \in N(v)} \phi(j) = k$$

dengan $\sum_{j \in N(v)} \phi(j)$ adalah jumlah label semua *edge* j yang *incident* dengan *vertex* v dan $G = \{1, 2, \dots, v + e\}$ maka disebut pelabelan total *super vertex-magic*. Balbuena *et al.* [1] melakukan penelitian mengenai pelabelan total *super vertex-magic* pada *disjoint m cycle* dan beberapa keluarga graf *circulant*. Hasil penelitian Balbuena *et al.* [1] menunjukkan bahwa terdapat pelabelan total *super vertex-magic* pada gabungan *disjoint m cycle* mC_n dengan m dan n ganjil, graf *circulant* $C_{1, s}$ dengan n ganjil ≥ 5 dan $s = \{2, 3, \dots, (n-1)/2\}$ dan graf *circulant* $C_{1,2,3}$ dengan n ganjil ≥ 7 sedemikian hingga diperoleh konstanta *magic k* tertentu. Karya Balbuena *et al.* [1] merupakan pengembangan dari penelitian dari MacDougall *et al.* [8]. MacDougall *et al.* [8] menunjukkan bahwa *cycle* C_n dengan n ganjil ≥ 3 memiliki pelabelan total *super vertex-magic*. Berdasarkan hasil kaji ulang, penulis menerapkan pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ dan gabungan *disjoint m* graf *circulant* $mC_{1, s}$. Hasil terapan menunjukkan bahwa terdapat pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ dengan n ganjil dan gabungan *disjoint m* graf *circulant* $mC_{1, s}$ dengan m, n ganjil ≥ 5 dan $s = \{2, 3, \dots, (n-1)/2\}$.

1)/2}. Sebagai pendukung pembahasan pelabelan total *super vertex-magic*, diberikan contoh-contoh untuk setiap graf yang menjadi objek penulisan skripsi.

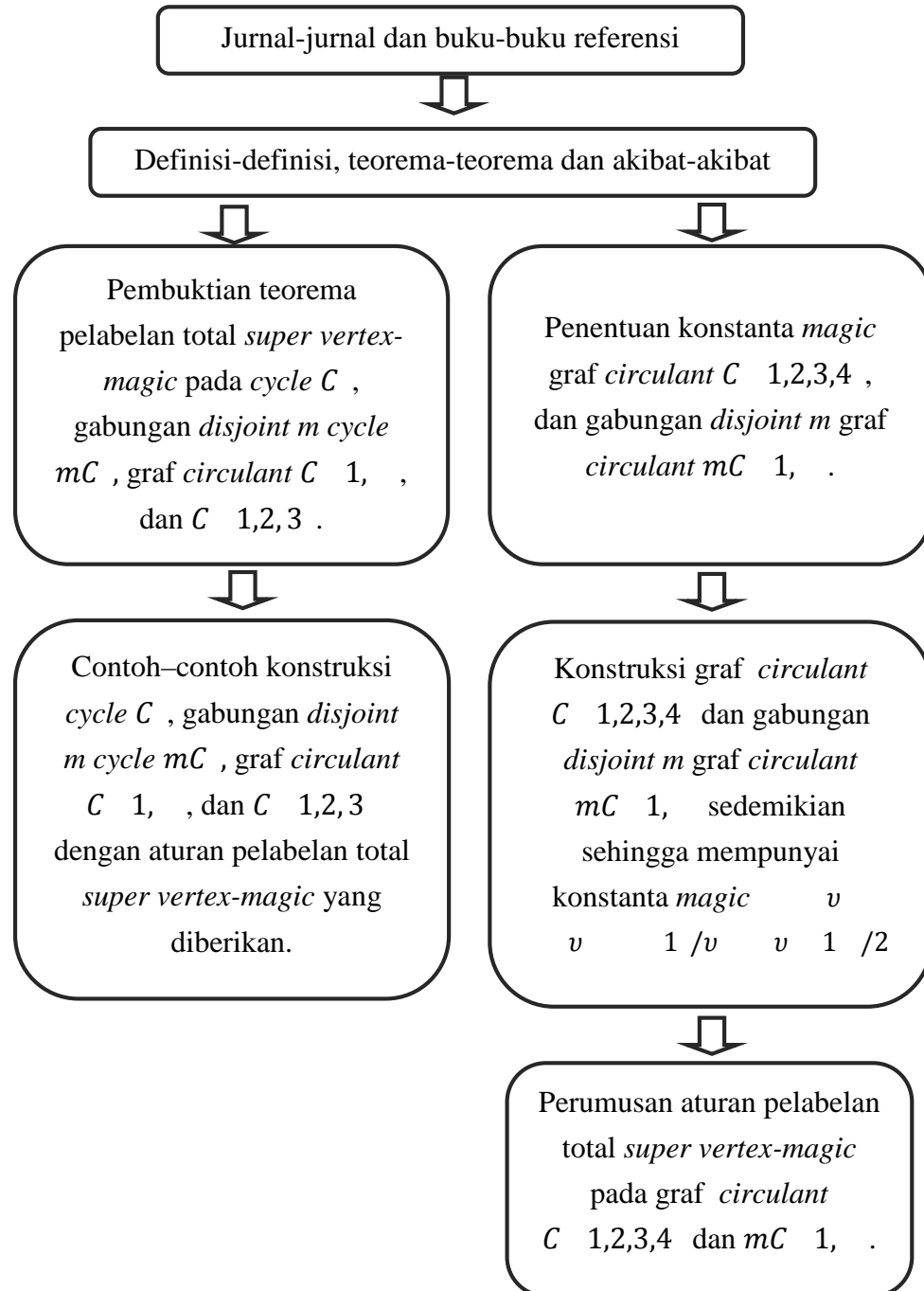
BAB III

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi adalah studi literatur. Bahan penulisan diambil dari buku referensi dan jurnal. Pembahasan skripsi merupakan kaji ulang dari jurnal karya Balbuena *et al.* [1] dan MacDougall *et al.* [8]. Tujuan dasar penulisan skripsi adalah memperkenalkan pelabelan total *super vertex-magic*. Sesuai tujuan penulis, disusun langkah-langkah penulisan skripsi sebagai berikut.

1. Berdasarkan *order*, *size* dan derajat pada graf dapat ditunjukkan bahwa jika terdapat pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle* C_n , graf *circulant* $C_n(1)$, $C_n(1, 2, 3)$, dan $C_n(1, 2, 3, 4)$ maka n ganjil. Gabungan *disjoint* m *cycle* mC_n dan gabungan *disjoint* m graf *circulant* $mC_n(1)$ memuat pelabelan total *super vertex-magic* jika m dan n ganjil.
2. Menentukan konstanta *magic* dan pelabelan total pada *cycle* C_n , gabungan *disjoint* m *cycle* mC_n , graf *circulant* $C_n(1)$, dan $C_n(1, 2, 3)$ menggunakan aturan pelabelan tertentu sedemikian sehingga diperoleh bobot *vertex* yang konstan dan senilai dengan konstanta *magic*.
3. Menerapkan hasil kaji ulang pada keluarga graf *circulant* yang lain, yaitu graf *circulant* $C_n(1, 2, 3, 4)$ dan gabungan *disjoint* m graf *circulant* $mC_n(1)$. Menentukan pelabelan pada $C_n(1, 2, 3, 4)$ dan $mC_n(1)$ dengan urutan langkah sebagai berikut.
 - a. Menentukan konstanta *magic* pada graf $C_n(1, 2, 3, 4)$ dan $mC_n(1)$,
 - b. Merumuskan aturan pelabelan total *super vertex-magic* pada graf $C_n(1, 2, 3, 4)$ dan $mC_n(1)$ dengan cara menentukan pola pelabelan total graf $C_n(1, 2, 3, 4)$ dan $mC_n(1)$ sedemikian sehingga graf memiliki bobot *vertex* yang konstan dan senilai dengan konstanta *magic*.

Skema Penelitian



BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Pelabelan Total *Super Vertex-Magic* pada Graf

Menurut MacDougall *et al.* [8], pelabelan total *super vertex-magic* adalah suatu bijeksi λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $1, 2, \dots, v + k$ dengan syarat bahwa untuk setiap $v \in V(G)$ berlaku

$$\sum_{j \sim v} \lambda(j) + \lambda(v) = k$$

dengan k bernilai konstan disebut konstanta *magic* dan $\lambda(V(G)) = \{1, 2, \dots, v\}$.

Teorema 4.1.1 *Jika G mempunyai suatu pelabelan total super vertex-magic, maka*

$$\frac{v + k}{2} = \frac{v + 1}{2}$$

Bukti

Diberikan graf G dan λ adalah pelabelan total *super vertex-magic* pada graf G sedemikian sehingga setiap *vertex* berbobot k . Jika $G = (V, E)$, $v \in V$ maka $\lambda(v) \in \{1, 2, \dots, v\}$ dengan $i \in \{1, 2, \dots, v\}$. Ditulis kembali rumusan matriks *adjacency* label, yaitu matriks simetris a_{ij} dengan $i, j = 1, 2, \dots, v$ sehingga

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda(j) & \text{jika } i = j \\ \lambda(i) + \lambda(j) & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

dengan $\lambda(i)$ adalah label *edge* dan $\lambda(j)$ adalah label *vertex*. Syarat *magic* menyiratkan bahwa jumlah semua entri pada baris ke- i dan kolom ke- j harus konstan dan senilai dengan konstanta *magic* k , untuk setiap $i = 1, 2, \dots, v$. Oleh karena itu diperoleh hubungan

$$\sum_{j=1}^v a_{ij} = \sum_{i=1}^v a_{ij} = k \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (4.2)$$

Menurut persamaan (4.1), a_{ii} untuk $i = j$ bernilai $\lambda(i)$ sehingga persamaan (4.2) dapat disajikan

$$\begin{array}{ccccc} a & a_3 & a_v & & \\ a & a_3 & a_v & & \\ \boxed{?} & & & & \\ v & a_v & a_v & a_v & v, \end{array}$$

hasil penjumlahan semua baris adalah

$$v = \frac{2}{a} \frac{a_3}{a_1} \frac{a_2}{a_1} \quad (4.3)$$

Menurut persamaan (4.1), jika $edge_j \in E$ maka $a_{ij} = \lambda(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ yang berlabel mulai dari $v = 1$ sampai dengan $v = n$, sehingga persamaan (4.3) dapat dituliskan

[illegible]

dan diperoleh konstanta *magic* pada graf, yaitu

$$\frac{v \quad v \quad 1}{v} \quad \frac{v \quad 1}{2} \quad 45$$

?

Teorema 4.1.1 menghasilkan Akibat 4.1.2 dan Akibat 4.1.3.

Akibat 4.1.2 Jika graf G mempunyai pelabelan total super vertex-magic, maka $v| \quad 1$ jika v ganjil dan $v|2 \quad 1$ jika v genap.

Akibat 4.1.3 Jika G adalah graf berorder genap yang mempunyai pelabelan total super vertex-magic maka $v \equiv 0 \pmod{8}$ dan $\frac{v}{2} \equiv 0$ atau $3 \pmod{4}$; atau $v \equiv 4 \pmod{8}$ dan $\frac{v}{2} \equiv 1$ atau $2 \pmod{4}$.

Teorema 4.1.4 *Jika suatu graf r -regular G berorder v mempunyai pelabelan total super vertex-magic, maka v dan r mempunyai parity yang berlawanan dan*

jika $v \equiv 0 \pmod 8$ maka $\equiv 0 \pmod 4$,
 jika $v \equiv 4 \pmod 8$ maka $\equiv 2 \pmod 4$

Bukti

Diasumsikan suatu graf r -regular G mempunyai order v , dengan v bernilai ganjil, dan graf G memiliki pelabelan total *super vertex-magic*. Jumlah *edge* dalam graf G dinotasikan E . Menurut Fletcher *et al.* [3], jumlah derajat semua *vertex* dalam suatu graf sama dengan dua kali *size*. Oleh karena setiap *vertex* dalam graf r -regular G mempunyai derajat yang sama yaitu r , maka *size* ϵ dapat disajikan

$$\frac{v}{2} \quad 4.6$$

Substitusi persamaan (4.6) ke konstanta *magic* (4.5) ditampilkan sebagai berikut.

$$\begin{array}{r} \frac{v - \frac{v}{2} + v - \frac{v}{2} + 1}{v} = \frac{v + 1}{2} \\ \frac{v + 2 - v - \frac{v}{2} + 1}{2v} = \frac{v + 1}{2} \\ \frac{2 - v - \frac{v}{2} + 1}{2} = \frac{v + 1}{2} \end{array}$$

Karena $\frac{v+1}{2}$ harus integer, $2 - v - \frac{v}{2} + 1$ dan $v + 1$ harus mempunyai *parity* yang sama sehingga jika v ganjil maka r genap, jika v genap maka r ganjil.

Merujuk pada Akibat 4.1.3 dan $\frac{v}{2}$, maka dapat dikatakan bahwa graf r -regular G berorder genap

- jika $v \equiv 0 \pmod{8}$ maka $\frac{v}{2} \equiv 0 \pmod{4}$.
- jika $v \equiv 4 \pmod{8}$ maka $\frac{v}{2} \equiv 2 \pmod{4}$. \square

Teorema 4.1.4 menyatakan bahwa jika suatu graf *super vertex-magic* berderajat ganjil maka mempunyai order genap. Jika graf *super vertex-magic* berderajat genap maka ber-order ganjil. Teorema 4.1.4 mengakibatkan gabungan *disjoint m* graf r -regular dengan setiap komponen ber-order v memuat pelabelan total *super vertex-magic*

- jika r genap maka nilai m dan v ganjil,
- jika r ganjil maka nilai m atau v genap.

Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa

- jika *cycle* C mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika n ganjil,
- jika gabungan *disjoint* m *cycle* mC mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika m dan n ganjil,
- jika graf *circulant* $C(1,2, \dots, n-1/2)$ mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika n ganjil,
- jika gabungan *disjoint* m graf *circulant* $mC(1,2, \dots, n-1/2)$ mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika m dan n ganjil.

4.2 Pelabelan Total Super Vertex-Magic pada Cycle

Cycle termasuk graf *regular* dengan $r = 2$ atau dapat disebut graf *2-regular*. *Cycle* mempunyai $v = n$, dengan v adalah *order*, n adalah *size* dan n adalah panjang. Dituliskan oleh MacDougall *et al.* [8], bahwa hanya *cycle* C dengan panjang ganjil atau n ganjil yang memuat pelabelan total *super vertex-magic*. Pernyataan MacDougall *et al.* [8] dikukuhkan dalam Teorema 4.2.1 berikut.

Teorema 4.2.1 Suatu *cycle* C mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika dan hanya jika n ganjil.

Bukti

“ \Rightarrow ” Diasumsikan terdapat *cycle* dengan *order* v merupakan graf *super vertex-magic* dengan konstanta *magic* k . Oleh karena *cycle* mempunyai v maka konstanta *magic* (4.5) disajikan

$$\begin{array}{rcl} \frac{v & v & v & v & 1}{v} & \frac{v & 1}{2} \\ \frac{2v & 2v & 1}{v} & \frac{v & 1}{2} \\ 4v & 2 & \frac{v & 1}{2} & 47 \end{array}$$

Cycle mempunyai $v = n$, jika n genap maka $n = 2k$, untuk sebarang sehingga persamaan (4.7) dapat disajikan

$$8k & 2 & \frac{2 & 1}{2}$$

$$\begin{aligned} & 8 - 2 = \frac{1}{2} \\ & 7 - \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

berarti diperoleh konstanta *magic k* yang tidak integer. Dapat dikatakan bahwa *cycle C* dengan *n* genap tidak memiliki pelabelan total *super vertex-magic*.

Jika *n* ganjil maka $n = 2k + 1$, untuk sebarang k sehingga persamaan (4.7) dapat disajikan

$$\begin{aligned} & 4 - 2 = 1 - 2 = \frac{2}{2} \\ & 8 - 2 = 7 - 2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

berarti diperoleh konstanta *magic k* yang integer sehingga disimpulkan *cycle C* dengan *n* ganjil memuat pelabelan total *super vertex-magic*.

“4” Misal *cycle C* mempunyai *n* ganjil dengan $n = 2k + 1$, diberi label dengan aturan pelabelan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & 2n - \frac{i - 1}{2}, \quad i \text{ ganjil} \\ & 2n - \frac{n - 1}{2} - \frac{i}{2}, \quad i \text{ genap} \\ & 2n - \frac{n - 1}{2} \end{aligned}$$

Pelabelan *edge* e_{ij} berarah searah jarum jam dari *i* ke *j* mod *n*. Oleh karena *vertex* *i* adjacent dengan *vertex* *i+1* dan *i-1*, bobot *vertex* *i* dalam *cycle C* dirumuskan

Aturan pelabelan total mengakibatkan bobot setiap *vertex* bernilai konstan. Misalnya *vertex* *i* dan *i+1*, ditunjukkan bahwa bobot *vertex* *i* sama dengan Bobot *vertex* *i+1*:

$$\begin{aligned} & 1 + 2n - 2n - \frac{n - 1}{2} \\ & 7n - 3/2 \end{aligned}$$

Bobot *vertex* :

$$\begin{array}{ccccccc} n & 2n & \frac{n-1}{2} & 2n & \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & \\ \hline 10n & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & 7n-3 & \\ \hline & & 2 & & 2 & 2 & \end{array}$$

Bobot *vertex* pada *cycle* di bawah aturan pelabelan total secara lengkap disajikan dalam Lampiran 1. Oleh karena bobot *vertex* sama pada setiap *vertex* maka dihasilkan konstanta *magic*. Pelabelan graf mengakibatkan himpunan *vertex* dilabeli dengan $1, 2, 3, \dots, n$ dan himpunan *edge* dilabeli dengan $n+1, n+2, \dots, 2n$. Pelabelan total pada *cycle* memenuhi definisi pelabelan total *super vertex-magic*. Terbukti bahwa suatu *cycle* mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika dan hanya jika n ganjil. \square

Pembuktian Teorema 4.2.1 memberikan rumus umum konstanta *magic cycle* C_n dengan n ganjil ≥ 3 yaitu

$$\frac{7n-3}{2} \quad 4$$

Bukti Teorema 4.2.1 dikonstruksikan dalam contoh-contoh berikut.

Contoh 1

Tiga buah graf *cycle* dengan panjang masing-masing 3, 5, dan 7 adalah graf *super vertex-magic*. Berapakah konstanta *magic* masing-masing *cycle* dan konstruksikan pelabelannya!

Penyelesaian

Menurut rumus umum konstanta *magic* pada *cycle* (4.9), konstanta *magic cycle* C_3 adalah

$$\frac{7 \cdot 3 - 3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

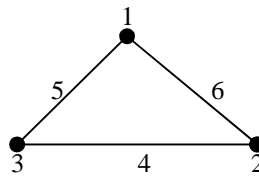
Konstanta *magic cycle* C_5 adalah

$$\frac{7 \cdot 5 - 3}{2} = \frac{38}{2} = 19$$

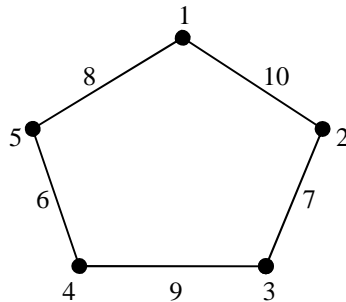
Konstanta *magic cycle* C_7 adalah

$$\frac{7+7+3}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

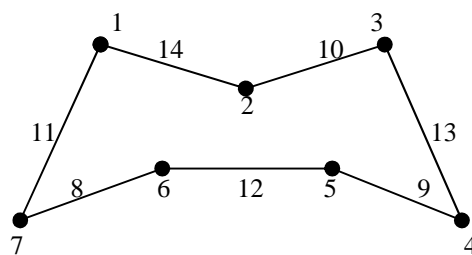
Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada cycle C_3, C_4, C_5 masing-masing disajikan dalam Gambar 4.1, Gambar 4.2 dan Gambar 4.3.



Gambar 4.1 Pelabelan total *super vertex-magic* pada C_3 dengan $k = 12$



Gambar 4.2 Pelabelan total *super vertex-magic* pada C_5 dengan $k = 11$



Gambar 4.3 Pelabelan total *super vertex-magic* pada C_7 dengan $k = 26$

Contoh 2

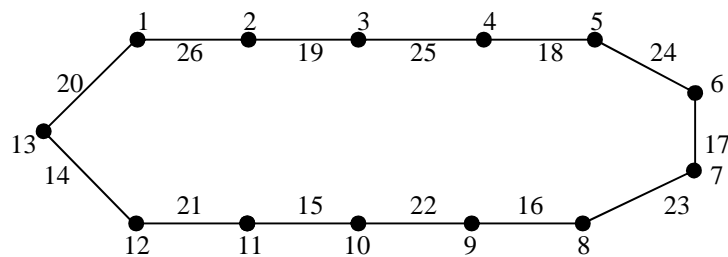
Jika terdapat suatu graf *super vertex-magic* berupa cycle dengan $n = 13$ maka berapakah konstanta *magic k* dan bagaimana konstruksi pelabelannya ?

Penyelesaian

Berdasarkan rumus umum konstanta *magic* pada *cycle* (4.9), konstanta *magic* *cycle* C_3 adalah

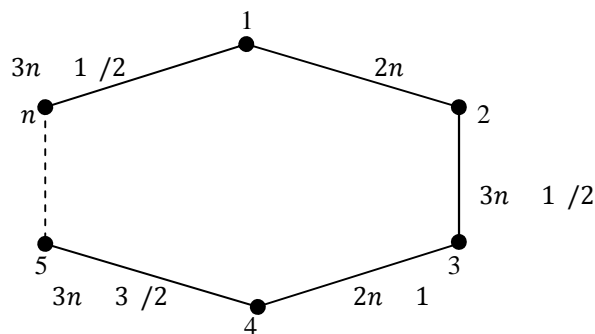
$$\frac{7+13}{2} + \frac{3}{2} = 47$$

Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle* C_3 disajikan oleh Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Pelabelan total *super vertex-magic*
pada C_3 dengan 47

Konstruksi *cycle super vertex-magic* C tersaji di Gambar 4.5. Jika diperiksa bobot setiap *vertex* pada *cycle* C dengan n ganjil ≥ 3 maka diperoleh konstanta *magic* $\frac{3n+1}{2}$.



Gambar 4.5 Pelabelan total *super vertex-magic* pada C

4.3 Pelabelan Total *Super Vertex-Magic* pada Gabungan *Disjoint m Cycle*

Gabungan *disjoint m cycle*, dinotasikan mC , merupakan graf tak terhubung yang terbentuk dari m cycle. Gabungan *disjoint m cycle* mempunyai v dan derajat setiap *vertex* adalah dua. Menurut Balbuena *et al.* [1], selain cycle dengan n ganjil, graf 2-regular yang mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* adalah gabungan *disjoint m cycle* dengan m , n ganjil. Rumus konstanta *magic* mC diberikan oleh Balbuena *et al.* [1] dalam Teorema 4.3.1.

Teorema 4.3.1 Jika m dan n ganjil, maka graf mC mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan

$$\frac{7mn - 3}{2}$$

Bukti

Diberikan pelabelan total pada graf mC untuk m, n ganjil dengan aturan pelabelan berikut. Untuk setiap $1, 2, \dots, m$, dinyatakan *vertex-vertex* dari pergandaan ke- p dalam mC dengan p , dan *edge-edge* dengan p , untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Pelabelan total terbagi menjadi dua komponen. Komponen pertama, graf mC dengan $1, 2, \dots, m - 1/2$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll} \frac{im - 2}{mn - 1} & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n - 2, \\ \frac{m - 1}{2} & \text{untuk } i = n - 1, \\ & \text{untuk } i = n; \\ \frac{1}{2} (3n - i - 1) & \text{untuk } i = 1, 3, \dots, n - 2, \\ \frac{1}{2} (4n - i - m - 1) & \text{untuk } i = 2, 4, \dots, n - 3, \\ \frac{1}{2} (3n - 1 - m - 2) & \text{untuk } i = n - 1, \\ 2mn - 1 & \text{untuk } i = n \end{array}$$

Komponen kedua adalah graf mC dengan $m - 1/2, \dots, m$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll}
\frac{i-1-m-2}{mn-1} & \text{untuk } i=1,2,\dots,n-2, \\
\frac{3m-1}{2} & \text{untuk } i=n-1, \\
& \text{untuk } i=n; \\
\frac{1}{2}(3n-i-1-m)-\frac{1}{2} & \text{untuk } i=1,3,\dots,n-2, \\
\frac{1}{2}(4n-i-m-1) & \text{untuk } i=2,4,\dots,n-3, \\
\frac{3}{2}(n-1-m)-2 & \text{untuk } i=n-1, \\
2mn-1 & \text{untuk } i=n
\end{array}$$

Pelabelan $edge$ j berarah searah jarum jam dari i ke $j \bmod n$. Oleh karena $vertex$ i $adjacent$ dengan $vertex$ $i-1$ dan $i+1$, maka bobot $vertex$ i dalam gabungan $disjoint m$ cycle dirumuskan

Pelabelan total mengakibatkan bobot $vertex$ konstan. Bobot $vertex$ untuk $i=3,5,\dots,n-2$ dan $i=1,2,\dots,m-1/2$ disajikan sebagai berikut.

$$\begin{array}{l}
i-m-2-\frac{1}{2}(3n-i-1-m)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(4n-i-1-m-1) \\
\frac{3}{2}mn-2mn-3-\frac{7mn-3}{2}
\end{array}$$

Bobot $vertex$ untuk $i=3,5,\dots,n-2$ dan $i=m-1/2,\dots,m$, yaitu

$$\begin{array}{l}
i-1-m-2-\frac{1}{2}(3n-i-1-m)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(4n-i-1-m-1) \\
\frac{3}{2}mn-2mn-\frac{3}{2}-\frac{7mn-3}{2}
\end{array}$$

Bobot $vertex$ gabungan $disjoint m$ cycle di bawah aturan pelabelan total secara lengkap disajikan dalam Lampiran 2. Nilai konstan yang dihasilkan dari bobot $vertex$ disebut konstanta *magic*. Pelabelan total mengakibatkan himpunan $vertex$ dilabeli dengan $1,2,3,\dots,mn$ dan himpunan $edge$ dilabeli dengan $mn-1,mn-2,\dots,2mn$. Oleh karena itu, terbukti bahwa jika m dan n ganjil,

maka graf mC mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta $magic = \frac{3}{2}$

□

Teorema 4.3.1 memberikan rumus umum konstanta *magic* gabungan *disjoint m cycle* mC dengan m dan n ganjil yaitu

$$\frac{7mn + 3}{2} \quad (4.10)$$

Bukti Teorema 4.3.1 dikonstruksikan dalam Contoh 3 dan Contoh 4.

Contoh 3

Dua buah graf G dan G adalah gabungan *disjoint m cycle* mC_3 dengan masing-masing mempunyai $m = 3$ dan $m = 5$. Tentukan konstanta *magic* graf G dan G beserta konstruksi pelabelannya !

Penyelesaian

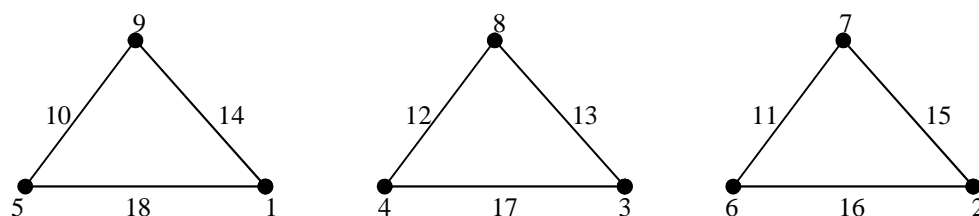
Berdasarkan persamaan (4.10), konstanta *magic* graf G yang merupakan gabungan *disjoint m cycle* dengan $n = 3$ dan $m = 3$ atau dinotasikan $3C_3$ adalah

$$\frac{7 \cdot 3 \cdot 3 + 3}{2} = \frac{66}{2} = 33$$

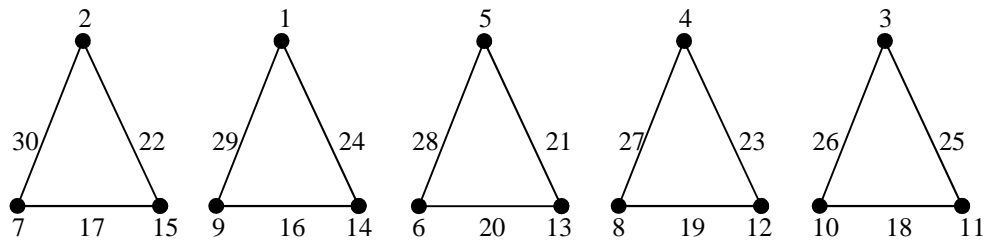
Konstanta *magic* graf G yang berupa gabungan *disjoint 5 cycle* dengan panjang 3 atau dinotasikan $5C_3$ adalah

$$\frac{7 \cdot 5 \cdot 3 + 3}{2} = \frac{108}{2} = 54$$

Konstruksi $3C_3$ disajikan dalam Gambar 4.6 dan $5C_3$ disajikan dalam Gambar 4.7.



Gambar 4.6 Pelabelan total *super vertex-magic* pada $3C_3$ dengan 33



Gambar 4.7 Pelabelan total *super vertex-magic*
pada $5C_3$ dengan 54

Contoh 4

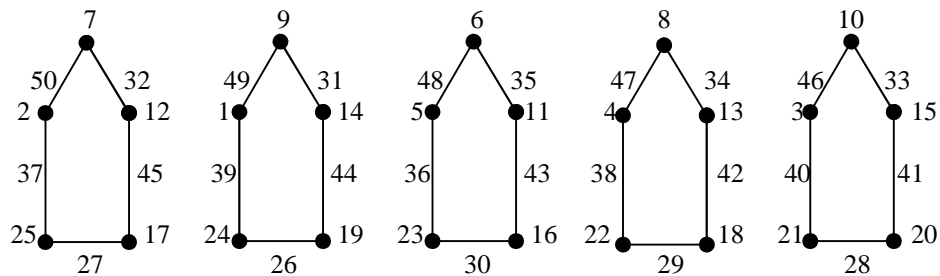
Jika sebuah graf berbentuk gabungan *disjoint 5 cycle* dengan $n = 5$ merupakan graf *super vertex-magic* maka tentukanlah konstanta *magic* dan konstruksi pelabelannya!

Penyelesaian

Konstanta *magic* gabungan *disjoint 5 cycle* dengan $n = 5$ adalah

$$\frac{7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3}{2} = \frac{178}{2} = 89$$

Konstruksi $5C_5$ disajikan dalam Gambar 4.8.



Gambar 4.8 Pelabelan total *super vertex-magic*
pada $5C_5$ dengan 89

4.4 Pelabelan Total *Super Vertex-Magic* pada Graf *Circulant* ,

Graf *circulant* termasuk keluarga graf *regular* karena setiap *vertex*-nya berderajat sama. Graf *circulant* $C(n, S)$ dengan $n \geq 1$, $2 \leq |S| \leq n-1$ memiliki

bagian luar berbentuk *cycle* dengan panjang n dan memiliki *chord* yang menghubungkan himpunan *vertex* dengan jarak s pada *cycle*. Graf *circulant* C_1 , dibentuk dari n ganjil ≥ 5 *vertex*. Hubungan *order*, *size* dan panjang dalam graf *circulant* C_1 , adalah $v = n$, $2v = 2n$. Balbuena *et al.* [1] mengemukakan pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant* C_1 , dalam Teorema 4.4.1.

Teorema 4.4.1 Untuk n ganjil ≥ 5 dan $s = 2, 3, \dots, n-1/2$, graf *circulant* C_1 , mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta magic

$$\frac{17n-5}{2}$$

Bukti

Diasumsikan bahwa graf *circulant* C_1 , mempunyai n ganjil ≥ 5 dan $s = 2, 3, \dots, n-1/2$. Diberikan pelabelan total ϕ_3 pada graf *regular* C_1 , berderajat 4 dengan aturan pelabelan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \phi_3(i) &= i && \text{untuk } i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \phi_3(n+i) &= i && \text{untuk } i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \phi_3\left(\frac{4n-i}{2}\right) &= \frac{4n-i}{2} && \text{untuk } i = 0, 2, 4, \dots, n-1 \\ \phi_3\left(\frac{3n-i}{2}\right) &= \frac{3n-i}{2} && \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, n-2 \\ \phi_3(2n-i-1) &= 2n-i-1 && \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Pelabelan total ϕ_3 pada *edge* e_j berarah searah jarum jam dari i ke $j \pmod n$.

Oleh karena *vertex* v_i adjacent dengan *vertex* v_{i+1} , v_{i-1} , dan v_{i+2} maka bobot *vertex* v_i dalam graf *circulant* C_1 , dapat dirumuskan

Selanjutnya diselidiki bobot *vertex* v_i untuk $i = 0$ menggunakan aturan pelabelan total ϕ_3

$$\begin{aligned} \phi_3(v_0) &= \phi_3(v_1) + \phi_3(v_{n-1}) + \phi_3(v_{n/2}) + \phi_3(v_{n/2+1}) \\ &= 1 + (n-1) + \frac{3n-1}{2} + (2n-1) = 2n + n = 3n \end{aligned}$$

$$7n - 2 \frac{3n - 1}{2}$$

$$17n - 5/2$$

Bobot *vertex* untuk $i = 1, 3, 5, \dots, \frac{n-1}{2} \pmod n$ adalah

$$i \frac{3n - i}{2} \frac{4n - i - 1}{2} 2n - i - 1 \quad 2n - n \quad i - 1$$

$$5n - i - 2 \frac{7n - 2i - 1}{2}$$

$$17n - 5/2$$

Bobot *vertex* pada graf *circulant* $C(1, \dots)$ di bawah aturan pelabelan total \mathcal{L}_3 disajikan secara lengkap dalam Lampiran 3. Oleh karena pelabelan total \mathcal{L}_3 menghasilkan bobot *vertex* yang konstan maka dapat dikatakan bahwa pelabelan total \mathcal{L}_3 pada graf *circulant* $C(1, \dots)$ mengakibatkan suatu nilai tetap yang disebut konstanta *magic* dengan rumus ———. Pelabelan total \mathcal{L}_3 memberi label *vertex*

$1, 2, \dots, n$ dan label *edge* $n - 1, n - 2, \dots, 3n$, sehingga pelabelan total \mathcal{L}_3 merupakan pelabelan total *super vertex-magic*. Terbukti bahwa untuk n ganjil 5 dan $2, 3, \dots, n - 1/2$, graf *circulant* $C(1, \dots)$ mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta *magic*

$$\frac{17n - 5}{2} \quad 4.11$$

□

Bukti Teorema 4.4.1 dikonstruksikan dalam Contoh 5 dan 6 berikut.

Contoh 5

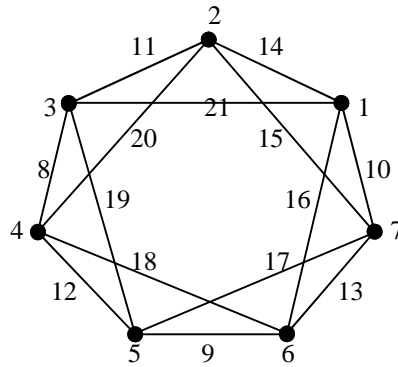
Tentukan konstanta *magic* graf *circulant* $C(1, \dots)$ dengan $n = 7$, kemudian konstruksikan menggunakan pelabelan total *super vertex-magic* !

Penyelesaian

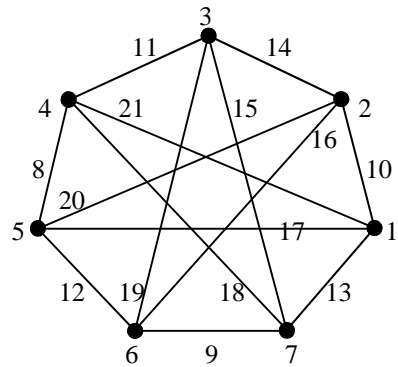
Berdasarkan rumus (4.11), konstanta *magic* graf *circulant* $C(1, \dots)$ dengan $n = 7$ adalah

$$\frac{17 \cdot 7 - 5}{2} = \frac{124}{2} = 62$$

Graf *circulant* $C_{1,2}$ dengan $n = 7$ dapat dikonstruksikan sebagai $C_{1,2}$ dan $C_{1,3}$. Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant* $C_{1,2}$ dengan $n = 7$ disajikan oleh Gambar 4.9 dan Gambar 4.10.



Gambar 4.9 Pelabelan total *super vertex-magic* pada $C_{1,2}$ dengan $n = 7$



Gambar 4.10 Pelabelan total *super vertex-magic* pada $C_{1,3}$ dengan $n = 7$

Contoh 6

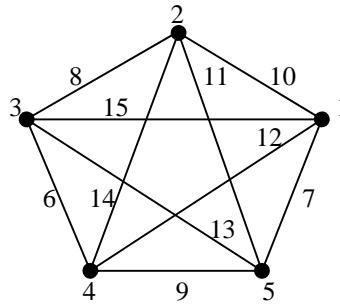
Tentukan konstanta *magic* graf *circulant* $C_{1,2}$ dengan $n = 5$, kemudian konstruksikan sedemikian sehingga disebut graf *super vertex-magic* !

Penyelesaian

Berdasarkan rumus (4.11), konstanta *magic* graf *circulant* $C_{1,2}$ adalah

$$\frac{17 \cdot 5}{2} + \frac{5}{2} = 45$$

Graf *circulant* $C(5, \{1, 2\})$ dengan $n = 5$ hanya dapat dikonstruksikan sebagai $C(5, \{1, 2\})$. Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant* $C(5, \{1, 2\})$ disajikan oleh Gambar 4.11.



Gambar 4.11 Pelabelan total *super vertex-magic* pada $C(5, \{1, 2\})$ dengan $\Sigma = 45$

4.5 Pelabelan Total *Super Vertex-Magic* pada Graf *Circulant* $C(n, \{1, 2\})$

Graf *circulant* $C(n, \{1, 2\})$ merupakan graf *regular* berderajat 6. Graf 6-*regular* $C(n, \{1, 2\})$ mempunyai $v = n$ dan $e = 3n$. Oleh karena graf *circulant* $C(n, \{1, 2\})$ dapat dikonstruksikan jika $n \geq 7$ maka pelabelan total *super vertex-magic* termuat dalam graf *circulant* $C(n, \{1, 2\})$ dengan n ganjil ≥ 7 . Konstanta *magic* pada graf *circulant* $C(n, \{1, 2\})$ dengan n ganjil ≥ 7 dikemukakan oleh Balbuena *et al.* [1] dalam Teorema 4.5.1.

Teorema 4.5.1. Untuk n ganjil ≥ 7 graf *circulant* $C(n, \{1, 2\})$ mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta *magic*

$$\frac{31n - 7}{2}$$

Bukti

Diasumsikan bahwa graf *circulant* $C(n, \{1, 2\})$ mempunyai n ganjil ≥ 7 . Diberikan pelabelan total pada graf *regular* $C(n, \{1, 2\})$ berderajat 6 dengan aturan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
3 - i & \text{ untuk } i = 0, 1, 2 \\
n - 3 - i & \text{ untuk } i = 4, 5, \dots, n - 1 \\
\frac{2n}{2} - i & \text{ untuk } i = 0 \\
\frac{3n}{2} - i & \text{ untuk } i = 1, 3, 5, \dots, n - 2 \\
\frac{2n}{2} - i & \text{ untuk } i = 2, 4, 6, \dots, n - 1 \\
3n - i, & \text{ untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \\
3 - 3n - i - 1, & \text{ untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n - 1
\end{aligned}$$

Pelabelan total pada $edge$ j berarah searah jarum jam dari i ke $j \bmod n$.

Pelabelan total mengakibatkan himpunan $vertex$ diberi label $1, 2, 3, \dots, n$ dan himpunan $edge$ diberi label $n - 1, n - 2, \dots, 4n$.

$Vertex$ pada graf $circulant C_{1,2,3}$ adjacent dengan 6 $vertex$, yaitu $i, i+1, i+2, i+3, i-1, i-2$. Bobot $vertex$ pada graf $circulant C_{1,2,3}$ dirumuskan

Bobot $vertex$ untuk $i = 0$ adalah

$$\begin{aligned}
& 3 - 2n - \frac{2n - n - 1}{2} - 3n - 3n - n - 2 - 3n - 1 - 3n - n - 3 - 1 \\
& 4 - 14n - \frac{3n - 1}{2} \\
& \frac{31n - 7}{2}
\end{aligned}$$

Bobot $vertex$ untuk $i = 1$ adalah

$$\begin{aligned}
& 3 - 1 - \frac{3n - 1}{2} - 2n - 3n - 1 - 3n - n - 1 - 3n - 1 - 1 - 3n - n \\
& 2 - 1
\end{aligned}$$

$$3 - 14n + \frac{3n - 1}{2}$$

$$\frac{31n - 7}{2}$$

Bobot *vertex* pada graf *circulant* $C_{1,2,3}$ di bawah aturan pelabelan total disajikan secara lengkap dalam Lampiran 4. Pelabelan total mengakibatkan setiap *vertex* memiliki bobot *vertex* yang konstan, sehingga dapat dikatakan bahwa pelabelan total membentuk konstanta *magic*. Pelabelan total memberi label *vertex* $1, 2, \dots, n$ dan label *edge* $n+1, n+2, \dots, 4n$. Syarat pelabelan total *super vertex-magic* dipenuhi oleh pelabelan total, sehingga pelabelan total disebut pelabelan total *super vertex-magic*. Terbukti bahwa untuk n ganjil ≥ 7 , graf *circulant* $C_{1,2,3}$ mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* dengan konstanta *magic*

$$\frac{31n - 7}{2} \quad 412$$

□

Bukti dari Teorema 4.5.1 didukung oleh Contoh 7 dan Contoh 8 berikut.

Contoh 7

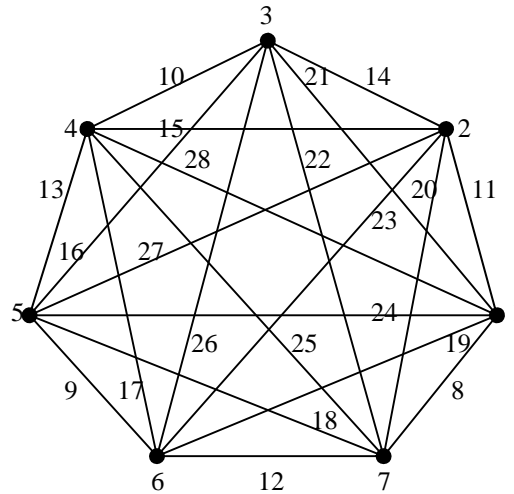
Tentukan konstanta *magic* graf *circulant* $C_{1,2,3}$ kemudian konstruksikan menggunakan pelabelan total *super vertex-magic* !

Penyelesaian

Berdasarkan persamaan (4.12), konstanta *magic* graf *circulant* $C_{1,2,3}$ adalah

$$\frac{31 \cdot 7 - 7}{2} = \frac{224}{2} = 112$$

Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant* $C_{1,2,3}$ disajikan oleh Gambar 4.12.



Gambar 4.12 Pelabelan total *super vertex-magic*
pada $C_3(1,2,3)$ dengan $\lambda = 112$

Contoh 8

Tentukan konstanta *magic* graf *circulant* $C_3(1,2,3)$ kemudian konstruksikan menggunakan pelabelan total *super vertex-magic* !

Penyelesaian

Berdasarkan persamaan (4.12), konstanta *magic* graf *circulant* $C_3(1,2,3)$ adalah

$$\frac{31 + 13 + 7}{2} = \frac{410}{2} = 205$$

Konstruksi pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant* $C_3(1,2,3)$ dengan $n = 13$ secara geometris kurang efisien. Oleh karena itu digunakan tabel *adjacency* label yang bersesuaian dengan (4.1) untuk menunjukkan bahwa graf *circulant* $C_3(1,2,3)$ merupakan graf *super vertex-magic* dengan $\lambda = 205$. Tabel pelabelan total *super vertex-magic* pada graf *circulant* $C_3(1,2,3)$ disajikan oleh Tabel 4.1. Penjumlahan entri-entri setiap baris ke- i dan kolom ke- j adalah konstan, yaitu 205, disebut konstanta *magic* $C_3(1,2,3)$.

Tabel 4.1 Pelabelan total *super vertex-magic*
pada C_3 1,2,3 dengan 205

$v_j/$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	3	26	39	40	0	0	0	0	0	0	50	28	19
1	26	2	20	38	41	0	0	0	0	0	0	51	27
2	39	20	1	14	37	42	0	0	0	0	0	0	52
3	40	38	14	13	21	36	43	0	0	0	0	0	0
4	0	41	37	21	12	15	35	44	0	0	0	0	0
5	0	0	42	36	15	11	22	34	45	0	0	0	0
6	0	0	0	43	35	22	10	16	33	46	0	0	0
7	0	0	0	0	44	34	16	9	23	32	47	0	0
8	0	0	0	0	0	45	33	23	8	17	31	48	0
9	0	0	0	0	0	0	46	32	17	7	24	30	49
10	50	0	0	0	0	0	0	47	31	24	6	18	29
11	28	51	0	0	0	0	0	0	48	30	18	5	25
12	19	27	52	0	0	0	0	0	0	49	29	25	4

4.6 Pelabelan Total Super Vertex-Magic pada Graf Circulant

Graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ merupakan graf 8-regular. Bagian luar graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ berupa *cycle* dan *chord* berjarak 2, 3 dan 4 pada *cycle*. Oleh karena graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ dapat dikonstruksi untuk n maka pelabelan total *super vertex-magic* terdapat pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ dengan n ganjil. Konstanta *magic* pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ dengan n ganjil ditentukan sebagai berikut.

Hubungan v , n dalam graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ adalah $v = n$ dan $4n$. Dilakukan substusi $v = n$ dan $4n$ ke persamaan (4.5) sehingga diperoleh

$$\frac{n + 4n + n + 4n + 1}{n} = \frac{n + 1}{2}$$

$$5 + 5n + 1 = \frac{n + 1}{2}$$

Konstanta *magic* pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ diperoleh dari persamaan (4.13), yaitu

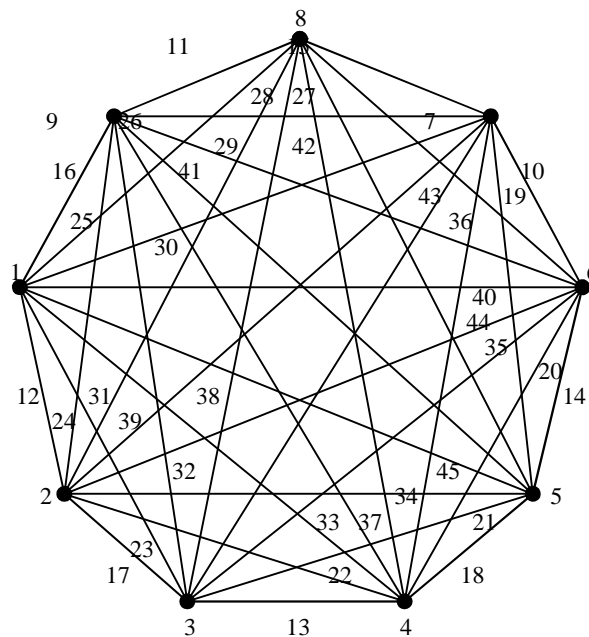
$$\frac{4n}{2} = 414$$

Selanjutnya dilakukan suatu pelabelan total, sebut pelabelan total ϕ , pada beberapa graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ sedemikian sehingga mempunyai konstanta *magic* $\phi = 225$.

Graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ dipilih sebagai contoh. Berdasarkan persamaan (4.14), graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ mempunyai konstanta *magic*

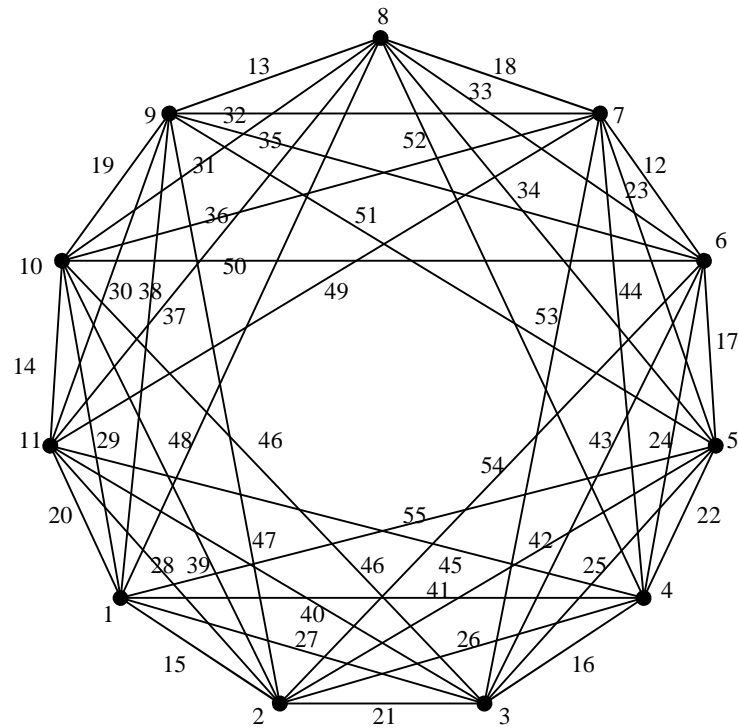
$$\frac{4}{2} = \frac{450}{2} = 225$$

Pelabelan ϕ pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ ditunjukkan oleh Gambar 4.13.



Gambar 4.13 Pelabelan total *super vertex-magic* pada $C_{1,2,3,4}$ dengan $\phi = 225$

Graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ dipilih sebagai objek penelitian berikutnya. Konstanta *magic* graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ adalah 225. Pelabelan total ϕ pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ sedemikian sehingga bobot setiap *vertex* konstan disajikan oleh Gambar 4.14.



Gambar 4.14 Pelabelan total *super vertex-magic* pada $C_{1,2,3,4}$ dengan 274

Tabel 4.2 Pelabelan total *super vertex-magic*
pada C_3 1,2,3,4 dengan 323

[illegible]

Tabel 4.3 Pelabelan total *super vertex-magic* pada
Graf Circulant C₃ 1,2,3,4 dengan 51

j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	8	33	63	64	102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	98	67	61	23
1	33	7	22	43	84	103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	99	66	62
2	63	22	6	32	44	83	104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	65
3	64	43	32	5	42	45	82	105	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	101
4	102	84	44	42	4	31	46	81	85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	103	83	45	31	3	41	47	80	86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	104	82	46	41	2	30	48	79	87	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	105	81	47	30	1	40	49	78	88	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	85	80	48	40	21	29	50	77	89	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	86	79	49	29	20	39	51	76	90	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	87	78	50	39	19	28	52	75	91	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	88	77	51	28	18	38	53	74	92	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	89	76	52	38	17	27	54	73	93	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	90	75	53	27	16	37	55	72	94	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	91	74	54	37	15	26	56	71	95	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	92	73	55	26	14	36	57	70	96	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	93	72	56	14	13	25	58	69	97
17	98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	94	71	57	25	12	35	59	68
18	67	99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	95	70	58	35	11	24	60
19	61	66	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	96	69	59	24	10	34
20	23	62	65	101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	97	68	60	34	9

Graf *circulant C₃ 1,2,3,4* mempunyai konstanta *magic* 323. Tabel 4.2 menyajikan pelabelan total pada graf *circulant C₃ 1,2,3,4* sedemikian sehingga diperoleh bobot *vertex* yang konstan, yaitu 323.

Contoh graf berikutnya, dipilih graf *circulant C₃ 1,2,3,4* yang mempunyai konstanta *magic* 51. Pelabelan total pada graf *circulant C₃ 1,2,3,4* sedemikian sehingga diperoleh bobot *vertex* yang konstan, yaitu senilai dengan konstanta *magic* 51, disajikan oleh Tabel 4.3.

Pelabelan total pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ yang ditunjukkan oleh Gambar 4.13, Gambar 4.14, Tabel 4.2 dan Tabel 4.3 mempunyai pola hubungan antara label *vertex* dan indeks *vertex*, label *edge* dan indeks *edge*. Pola hubungan label dan indeks dirumuskan menjadi aturan pelabelan total *super vertex-magic* yaitu

$$\begin{array}{ll}
 8 - i & \text{untuk } i = 0, 1, \dots, 7 \\
 8 - n - i & \text{untuk } i = 8, \dots, n - 1 \\
 \frac{1}{2}(3n - i - 3) & \text{untuk } i = 0, 2, 4, \dots, n - 1 \\
 n - 1 & \text{untuk } i = 1 \\
 2n - \frac{i - 3}{2} & \text{untuk } i = 3, 5, \dots, n - 2 \\
 3n & \text{untuk } i = 0 \\
 3n - n - i & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n - 1 \\
 3n - 1 & \text{untuk } i = 0 \\
 4n - i - 1 & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n - 1 \\
 5n - i - 3 & \text{untuk } i = 0, 1, 2, 3 \\
 4n - i - 3 & \text{untuk } i = 4, 5, \dots, n - 1
 \end{array}$$

Arah pelabelan total pada *edge* j adalah searah jarum jam dari i ke j (mod n). Pelabelan total mengakibatkan setiap *vertex* pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ dengan *order* n mempunyai bobot *vertex* konstan. Bobot *vertex* pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ adalah

$$\text{Bobot vertex untuk } i = 0 \text{ adalah }$$

$$\begin{aligned}
 & 8 - 3n - 3 - 3n - n - 4 - 3n - 3n - n - n - 2 - 3n - 1 \\
 & 4n - n - 4 - 5n - 3 - 4n - n - 4 - 3 \\
 & 1 - 22n - \frac{1}{2}(5n - 7) - \frac{4 - n}{2}
 \end{aligned}$$

Bobot *vertex* untuk $i = 1$ adalah

$$\begin{aligned}
 & 7n - 1 - 3n + 3 + 3n - n + 1 + 3n - n + n + 1 + 4n \\
 & 1 + 1 + 4n - n + 2 + 1 + 5n + 1 + 3 + 4n - n + 3 + 3 \\
 & 3 + 23n + \frac{1}{2} + 3n + 3 + \frac{4n}{2}
 \end{aligned}$$

Bobot *vertex* pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ secara lengkap disajikan dalam Lampiran 5. Nilai konstan — yang diperoleh dari bobot *vertex* graf $C_{1,2,3,4}$ disebut konstanta *magic* $C_{1,2,3,4}$. Pelabelan total mengakibatkan label *vertex* $1, 2, \dots, n$ dan label *edge* $n + 1, n + 2, \dots, 5n$ sehingga pelabelan total disebut pelabelan total *super vertex-magic*.

4.7 Pelabelan Total *Super Vertex-Magic* pada Gabungan *Disjoint m Graf Circulant* ,

Graf *circulant* mC_1 , merupakan graf 4-regular yang terbentuk dari gabungan m graf *circulant* C_1 , . Setiap komponen graf *circulant* mC_1 , dapat dikonstruksi untuk v ganjil ≥ 5 . Pelabelan total *super vertex-magic* terbentuk pada graf *circulant* mC_1 , dengan m, n ganjil ≥ 5 . Hubungan v, n dalam graf *circulant* mC_1 , adalah $v = mn$ dan $n = 2mn$. Konstanta *magic* pada graf *circulant* mC_1 , dengan m, n ganjil ≥ 5 ditentukan sebagai berikut.

Substitusi $v = mn$ dan $n = 2mn$ ke persamaan (4.5), yaitu

$$\begin{aligned}
 & \frac{mn + 2mn + mn + 2mn + 1}{mn} + \frac{mn + 1}{2} \\
 & 3 + 3mn + 1 + \frac{mn + 1}{2} \quad \quad \quad 4.15
 \end{aligned}$$

Konstanta *magic* pada graf *circulant* $C_{1,2,3,4}$ diperoleh dengan menyamakan penyebut persamaan (4.15), yaitu

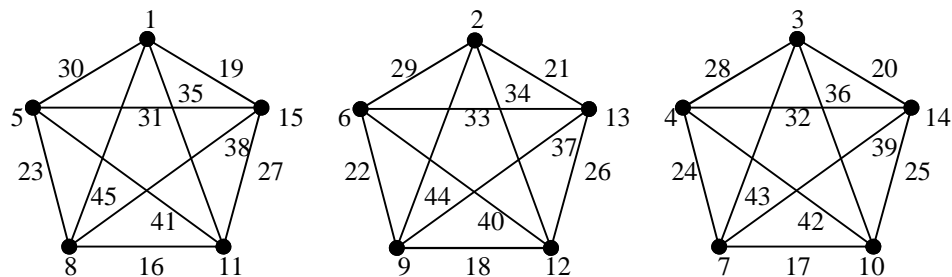
$$\frac{17mn + 5}{2} \quad \quad \quad 4.16$$

Suatu pelabelan total diberikan pada graf *circulant* mC_1 , , sebut pelabelan total , sedemikian sehingga mempunyai konstanta *magic* _____. Pelabelan total menggunakan aturan pelabelan total *super vertex-magic* pada gabungan *disjoint m cycle* untuk melabeli bagian luar gabungan *disjoint m* graf *circulant* yang berbentuk *cycle*. Label *vertex* dan label *edge* yang membentuk *chord* ditentukan sedemikian sehingga diperoleh bobot *vertex* yang konstan.

Gabungan *disjoint m* graf *circulant* mC_1 , dengan $m = 3, n = 5$ dan 2 dipilih sebagai contoh. Berdasarkan rumus konstanta *magic* (4.16), konstanta *magic* graf *circulant* $3C_1,2$ adalah

$$\frac{17 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2} = \frac{260}{2} = 130$$

Pelabelan total pada graf *circulant* $3C_1,2$ sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic* 130, disajikan oleh Gambar 4.15.



Gambar 4.15 Pelabelan total *super vertex-magic* pada $3C_1,2$ dengan 130

Gabungan *disjoint m* graf *circulant* mC_1 , dengan $m = 5, n = 5$, 2 dipilih sebagai contoh berikutnya. Konstanta *magic* graf *circulant* $5C_1,2$ dengan rumus konstanta *magic* (4.16) adalah

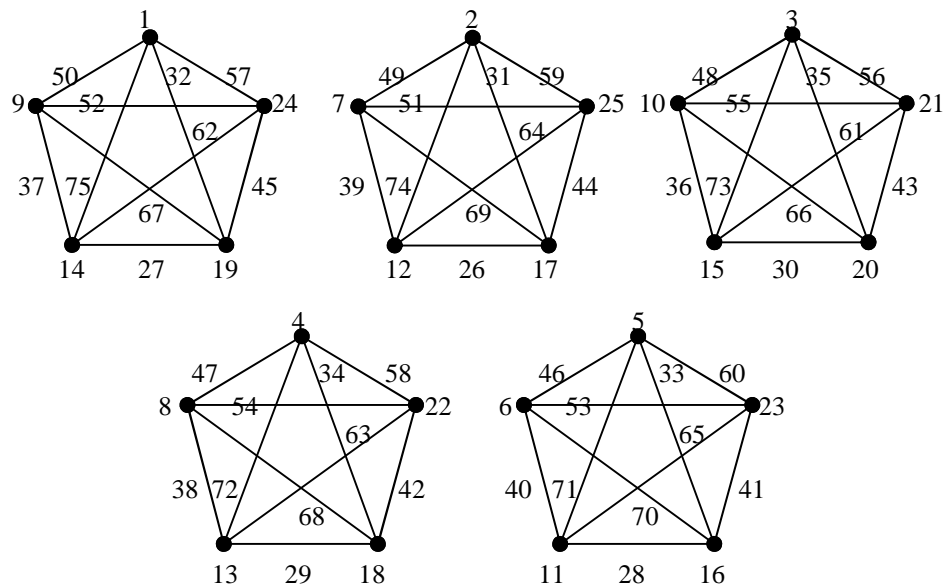
$$\frac{17 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2} = \frac{430}{2} = 215$$

Pelabelan total pada graf *circulant* $8C_1,2$ sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic* 215, disajikan oleh Gambar 4.16.

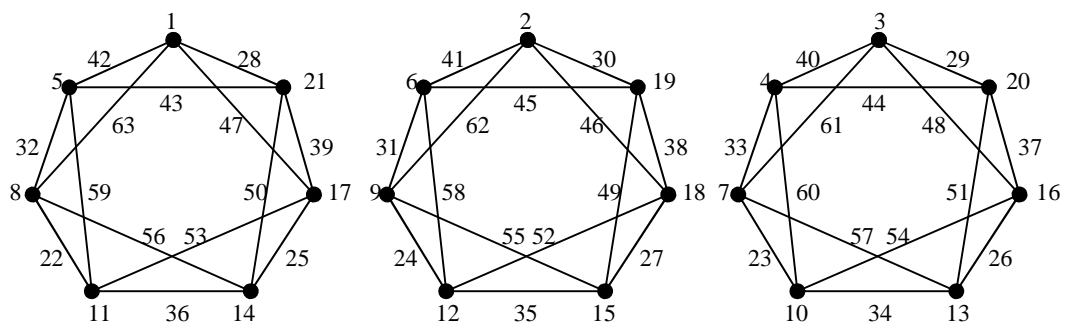
Objek penyelidikan selanjutnya adalah gabungan *disjoint m* graf *circulant* mC_1 , dengan $m = 3, n = 7$ dan 2 . Konstanta *magic* graf *circulant* $3C_{1,2}$ adalah

$$\frac{17 \ 3 \ 7 \ 5}{2} \quad \frac{362}{2} \quad 181$$

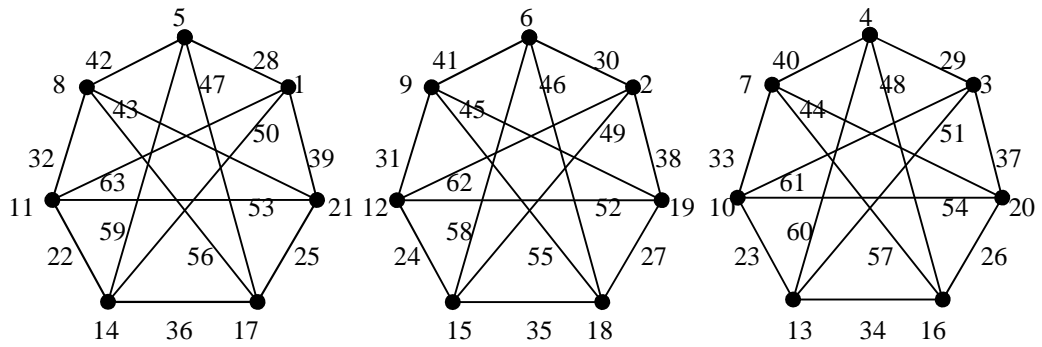
Pelabelan total pada graf *circulant* $3C_{1,2}$ sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic* 181 disajikan oleh Gambar 4.17.



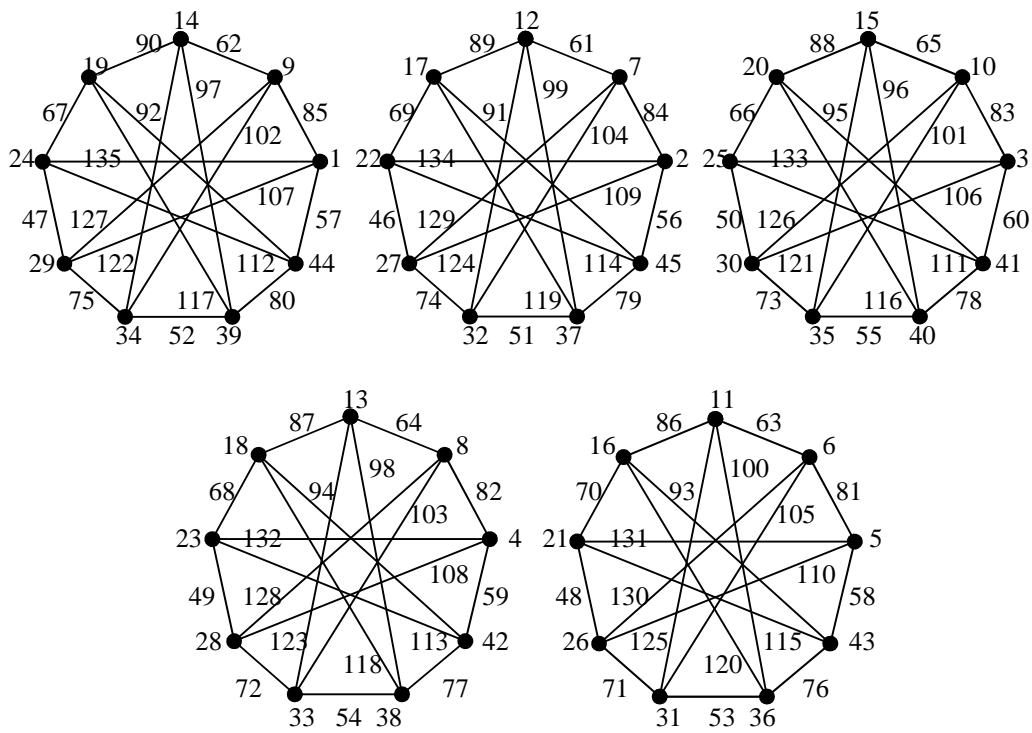
Gambar 4.16 Pelabelan total *super vertex-magic* pada $5C_{1,2}$ dengan 215



Gambar 4.17 Pelabelan total *super vertex-magic* pada $3C_{1,2}$ dengan 181



Gambar 4.18 Pelabelan total *super vertex-magic*
pada $3C_{1,3}$ dengan 181



Gambar 4.19 Pelabelan total *super vertex-magic*
pada $5C_{1,4}$ dengan 385

Gabungan *disjoint m* graf *circulant mC* 1, dengan $m = 3, n = 7$ dan 3 memiliki konstanta *magic*

$$\frac{17 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5}{2} = \frac{362}{2} = 181$$

Pelabelan total pada graf *circulant* $3C_{1,3}$ sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic* 181 disajikan oleh Gambar 4.18.

Gabungan *disjoint* m graf *circulant* mC_1 , dengan $m = 5, n$ dan 4 memiliki konstanta *magic* 385. Pelabelan total pada graf *circulant* $5C_{1,3}$ sedemikian sehingga dipenuhi nilai konstanta *magic* 385, disajikan oleh Gambar 4.19.

Pelabelan total pada graf *circulant* $3C_{1,2}$, $5C_{1,2}$, $3C_{1,2}$, $3C_{1,3}$ dan $5C_{1,4}$ memberi label *vertex* $1, 2, \dots, mn$ dan label *edge* $mn+1, mn+2, \dots, 3mn$. Hubungan label *vertex* dengan indeks *vertex*, label *edge* dengan indeks *edge* dalam pelabelan total disajikan dalam aturan pelabelan total. Setiap $1, 2, \dots, m$, dinyatakan *vertex-vertex* pergandaan ke- p dalam mC_1 , dengan p , dan *edge-edge* dengan p dan $p+1$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Pelabelan total dirumuskan menjadi dua komponen. Komponen pertama digunakan untuk memberi label graf *circulant* mC_1 , dengan $1, 2, \dots, m$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll}
 mn & \text{untuk } i = 2 \\
 mn & \frac{m-1}{2} \quad \text{untuk } i = 1 \\
 mn & i - 1 \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n-1 \\
 - 3n & i - 2 \quad \text{untuk } i = 0, 2, 4, \dots, n-3 \\
 - 4n & i - 1 \quad \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, n-4 \\
 - 3n & 1 \quad \text{untuk } i = n-2 \\
 2mn & 1 \quad \text{untuk } i = n-1 \\
 2n & i - 1 \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n-3 \\
 3mn & 1 \quad \text{untuk } i = n-2 \\
 2mn & \frac{m-1}{2} + 1 \quad \text{untuk } i = n-1
 \end{array}$$

Komponen kedua digunakan untuk memberi label graf *circulant* mC_1 , dengan $1, 2, \dots, m$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll}
mn & \frac{3m-1}{2} \\
mn & 2-1-m-i \\
& -3n-i-m- \\
& -4n-i-1-m-1 \\
& \frac{3}{2}n-1-m-2 \\
2mn & 1 \\
& 2n-i-m-2 \\
3mn & 1 \\
2n-1-m & \frac{m-1}{2}
\end{array}
\begin{array}{l}
\text{untuk } i=2 \\
\text{untuk } i=1 \\
\text{untuk } i=, 1, , n-1 \\
\text{untuk } i=0,2,4, , n-3 \\
\text{untuk } i=1,3,5, , n-4 \\
\text{untuk } i=n-2 \\
\text{untuk } i=n-1 \\
\text{untuk } i=0,1,2, , n-3 \\
\text{untuk } i=n-2 \\
\text{untuk } i=n-1
\end{array}$$

Arah pelabelan pada $edge_j$ adalah searah jarum jam dari i ke j , untuk $i, j \pmod n$.

Rumusan pelabelan total mengakibatkan graf *circulant* mC_1 , dengan *order* n mempunyai bobot *vertex* konstan. Oleh karena *vertex* *adjacent* dengan *vertex* , , dan maka bobot *vertex* graf *circulant* mC_1 , dinyatakan dengan

Bobot *vertex* dalam graf *circulant* mC_1 , diperiksa di bawah aturan pelabelan total. Dua *vertex* dipilih, yaitu untuk $i=0, n-1$, sebagai perwakilan *vertex-vertex* dalam graf *circulant* mC_1 , . Bobot *vertex* dalam graf *circulant* mC_1 , di bawah aturan pelabelan total disajikan secara lengkap dalam Lampiran 6. Bobot *vertex* pada komponen pertama graf *circulant* mC_1 , adalah

$$\begin{array}{l}
mn \quad 1-m-2-1-3n-2-m-2mn-1 \\
2n-1-m-2 \quad 2n-0 \quad 1-m-2 \\
7mn - \frac{3}{2}m \\
17mn-5/2
\end{array}$$

Bobot *vertex* pada komponen kedua graf *circulant* mC_1 , adalah

$$\begin{aligned} mn - 2 &= 1 + m + 0 + \frac{3}{2} - 2mn + 1 + 2mn \\ 2 &= 2n + 0 + m + 2 \\ 7mn &= \frac{3}{2} \\ \hline \end{aligned}$$

Bobot *vertex* pada komponen pertama graf *circulant* mC_1 , adalah

$$\begin{aligned} mn &= n + m + 2 + 1 + 2mn + 1 - 3n + 1 + m + 2 \\ 2mn &= 1 + 3n + m + 2 \\ 6mn &= \hline \end{aligned}$$

Bobot *vertex* pada komponen kedua graf *circulant* mC_1 , adalah

$$\begin{aligned} mn - 2 &= 1 + m + n + 1 + 2mn + 1 + \frac{3}{2} + n + 1 + m + 2 \\ 2n + 1 + m &= 3n + 1 + m + 2 \\ 7mn &= m + \frac{3}{2} + 2 \\ \hline \end{aligned}$$

Pelabelan total mengakibatkan setiap *vertex* mempunyai bobot *vertex* yang sama yaitu $\frac{3}{2}$. Nilai konstan $\frac{3}{2}$ yang diperoleh dari bobot *vertex* dalam gabungan *disjoint* m graf *circulant* disebut konstanta *magic*. Pelabelan juga mengakibatkan label *vertex* $1, 2, \dots, mn$ dan label *edge* $mn + 1, mn$

2, $\dots, 3mn$. Oleh karena pelabelan total memenuhi definisi pelabelan total *super vertex-magic* maka pelabelan total disebut pelabelan total *super vertex-magic*.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Sesuai dengan masalah yang telah dirumuskan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

3. Pelabelan total *super vertex-magic* termuat dalam *cycle* C dan graf *circulant* $C(1,2, \dots, n-1/2)$ yang memiliki n ganjil. Gabungan *disjoint m cycle* mC dan gabungan *disjoint m graf circulant* $mC(1,2, \dots, n-1/2)$ mempunyai pelabelan total *super vertex-magic* jika m dan n ganjil.
4. Konstanta *magic* dalam pelabelan total *super vertex-magic* ditentukan dengan rumus

$$\frac{v-1}{2}$$

Label diberikan pada *vertex* dan *edge* sedemikian hingga memiliki bobot *vertex* yang konstan dan senilai dengan konstanta *magic*. Pelabelan dilakukan dengan aturan tertentu sehingga graf-graf objek penulisan disebut graf *super vertex-magic*.

5.2. Saran

Skripsi ini membahas pelabelan total *super vertex-magic* pada *cycle* dan beberapa graf *circulant*. Pembaca yang tertarik dengan pokok bahasan skripsi, dapat mengembangkan pada kelas graf *circulant* yang lain atau graf-graf lain seperti graf *generalized Petersen* dan graf *Complete*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Balbuena, C., Barker, E., Das, K. C., Lin, Yuqing, Miller, M., Ryan, J., Slamin, Sugeng, K., Tkac, M., *On the Degrees of a Strongly Vertex-Magic Graph*, Discrete Math, **306**, 2006, 539-551.
- [2] Chartrand, G. and Oellermann, O. R., *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill Inc, New York, 1993.
- [3] Fletcher, P., Hoyle, H., Patty, C. W., *Foundation of Discrete Mathematics*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1991.
- [4] Gallian, J. A., *A Dynamic Survey of Graph Labelings*, The Electronic Journal of Combinatoric, 2009, #DS 16, pp 1-219.
- [5] Harary, F., *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Philippines, 1969.
- [6] Hartsfield, N. and Ringel, G., *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, Boston-San Diego-NewYork-London, 1990.
- [7] Johnsonbaugh, R., *Discrete Mathematics*, Fifth edition, Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [8] MacDougall, J. A., Miller, M., Sugeng, K. A., *Super Vertex-magic Total Labelings of Graphs*, Proceeding Australasian Workshop Combin. Algorithm 2004, Balina, NSW, 2004, 222-229.
- [9] Slamin, *Graph Labelings*, Departement of Computer Science and Software Engineering, The University of Newcastle, Australia, 1997.
- [10] Wallis, W. D., *Magic Graphs*, Birkhauser, 2001.

